経路積分法

—量子力学から場の理論へ—

M.S.スワンソン著
青山秀明
川村浩之共訳
和田信也

物理学叢書
74

吉岡書店

経路積分法

—量子力学から場の理論へ—

M. S. スワンソン 著

青山秀明
川村浩之 共訳
和田信也

物理学叢書

74

吉岡書店

Path Integrals and Quantum Processes

Mark S. Swanson

University of Connecticut at Stamford
Department of Physics
Stamford, Connecticut

ACADEMIC PRESS, INC.

Harcourt Brace Jovanovich, Publishers

Boston San Diego New York
London Sydney Tokyo Toronto

メリル・キャサリン・スワンソン
の思い出に捧げる
甘美なる魂が健やかならんことを

目　　次

第 7 章 — ゲージ場の理論

第 8 章 — 摂動論

第 9 章 — 非摂動的な結果

序

共変的場の理論の登場以来, 量子遷移振幅の経路積分形式は, 徐々に使用される機会が増えて, ポピュラーになってきた. 経路積分では, 伝統的な量子力学と場の量子論のかなめである抽象的なヒルベルト空間上の状態と物理的観測量である演算子という概念によらず, 古典力学と古典場の理論とに密接に関係したアプローチをとる. 経路積分の特に望ましいところは, 古典論での作用汎関数形式を, それを量子化した系での量子過程の計算に取り込むことにある. この様な関係のため, 量子過程を古典的軌道, 経路を使ってグラフィカルに視覚化することができ, 数多くの場合に直観的な考察が可能となり, 経路積分は強力な手法となる.

私は, この本で経路積分を標準的な演算子形式の自然な発展として提示することを基本的なテーマとした. この本では, 百科辞典的に経路積分の応用を述べたり, 数学的に厳密に経路積分を扱うことをしない. また, 粒子の散乱断面積や崩壊寿命, またくりこみの効果なども詳細には扱わない. これらについては, 優れた文献が数多くある. 重力や超弦理論の量子化などの理論物理学でまだよくわかっていない問題も論じない. しかし, この本では, 経路積分を使って解ける問題にどのようなものがあるかがわかるように, 様々な応用とそれらの間の論理的な関係を概観する. 読者には, この本で経路積分の一般的な構造を充分学んだ上で, 他の文献や本に進み, さらに理論物理学の最前線へと進むことを期待する.

理解を助けるために, 最初, 経路積分を一般的な場合に導き, 後に個々の問題に応用することにする. この本では, 読者は, 非相対論的量子力学でのヒルベルト空間の構造を理解していて, また統計力学を多少とも知っていることを想定している. 量子場については, 必要な概念は簡明ではあるが論じる. この本の中で, どこが重要で, また興味が起きるかは, それぞれの読者の経歴や目的によって異なるだろう. 最初の 4 章では量子力学に話を限るので, 大学

院１年生や早熟な学部生に適切だろう．この部分ではユークリッド回転，またはウィック回転を導入し，この本を通じてそれを使う．また，経路積分と分配関数の関係も論じる．４章では後の方での議論の発展に非常に重要なアイデアを多く述べるので，この本を論理的に読みすすめようとする読者にはこの章をぜひ読んでいただきたい．５章では，非可換であるグラスマン数を c 数と同様に自由に扱えるように，様々な局面から議論を進める．より現代的な内容は，６，７章から始まり，そこでは量子場の理論とその経路積分形式をのべる．特に，ゲージ場の経路積分での量子化は拘束条件のもとでの経路積分を使ってなされ，ゲージ場にともなうヒルベルト空間の不定計量が重要な役割を果たしていることを強調する．この本の残りの部分では，経路積分を場の理論の様々な問題に応用する．トピックとその解説の仕方は，現在ある文献や書物と相補的になるように選んだ．この本では例題があるが，これは読者が経路積分での標準的な計算法に慣れる目的と，あまり難しくない計算を一々解説するのを避けるように設けた．また，一部には，読者が勉強を遥か先へと進めるために設けたものもある．

この本を書くにあたって，私が辿ったこの知的な道を先に切り開いてきた多くの優れた物理学者たちから，はかりきれない恩恵を受けた．彼らの名前をすべて挙げることは不可能であるのでやめておく．ただ，多くの非常に才能のある人々が洞察力を持って努力し励んだ結果，自然界の深遠な神秘が解き開かされていく様子を物理学者として見ることができたのは非常に喜ばしいことであったことを述べておく．最後にこの本を作るにあたって世話になった多くの人，特にアカデミック・プレスのジェーン・エリス氏に感謝を述べておく．

コネティカット，スタムフォードにて，
マーク・スワンソン

第1章　数学的準備

この本全体を通してたくさんの数学上の約束事が使われている．この章ではこれらの約束事の概念を復習する．ただしここでは数理物理の分野の包括的, 系統的解説を意図しているわけではない．一見したところでは, ここに出てくるトピックは互いに関係のないように思われるが, そのどれもが経路積分を理解するには不可欠のものである．この章ではこの本に出てくる数学の記法をはっきりさせ, 読者の記憶を新たにするつもりである．さらに詳しく知りたい読者は, 参考文献[1, 2]をみるとよい．

この本の主要なテーマは, 量子過程を汎関数形式に書き換えることにある．その方法の主要な概念は, 関数の完全系という概念である．完全性や汎関数微分が何を意味するのかを明らかにするために, まずはじめに, ディラックのデルタ関数とその性質を1.1節で述べる．1.2節では, 関数の完全系の概念をフーリエ変換にそって説明する．そうするとデルタ関数は, 考えている関数の一般的集合（クラス）に対して完全系を張るような基底を使って書くことができる．1.3節で汎関数を定義し, 汎関数微分の方法を定式化する．これらの方法を使って, 古典力学の作用汎関数による取り扱いを簡単に述べる．1.4節では, 行列の最も重要な性質について概説し, 多変数関数の空間へ拡張する．1.5節では, 通常の経路積分の計算をする際に最も重要になるガウス積分とヤコビアンの議論をしてこの章を終る．

1.1　ディラックのデルタ関数

デルタ関数 $\delta(x)$ は積分を使って定義されている [3]. 具体的には, デルタ関数はある任意の関数 $f(x)$ に対して, 積分で表された,

$$\int dx\, f(x)\delta(x-a) = f(a) \tag{1.1}$$

を満たすものとして定義される. ただし上の式は, 積分区間が $x=a$ を含む開区間でなりたち, そうでないとき積分はゼロになる. 関数 $f(x)$ は**テスト関数** (test function) と呼ばれる. デルタ関数は関数の概念をより一般的な写像にまで拡張したもので, **超関数** (distributions) と呼ばれている [4]. 直観的には引数がゼロになる点（これらの点では発散している）を除く全ての場所で基本的にゼロであるような特殊な関数である. 直観的に考えると, すぐに超関数 $x\delta(x)=0$ という結論にいたる. しかし, 例えば $f(x)=1/x$ のような原点で発散している関数をテスト関数にして積分するとこの結論は間違ったものになる. テスト関数の組が原点で発散するような関数を含まないならば, 超関数 $x\delta(x)$ は積分したときに明らかにゼロに等しい. この簡単な例から, 超関数の性質は積分の中に含まれるテスト関数の性質に大きく依存することがわかる.

次の節のためにより実用的に $\delta(x)$ やテスト関数を定義し, デルタ関数の多くの性質を定義式(1.1)から導きだそう. ただし詳しい証明は省略する. 部分積分を行い, 端点からの寄与を無視すると,

$$\int dx\, f(x)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\delta(x-a) = (-1)^n \left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{x=a} \tag{1.2}$$

が得られる. 変数を取り替えることにより,

$$\int dx\, f(x)\, \delta(ax-b) = \frac{1}{|a|} f(b/a) \tag{1.3}$$

を得る. デルタの引数それ自身が関数 $g(x)$ であり, 値 $x_1, \ldots, x_n$ が $g(x)$ の

n 個のゼロ点であるとすると,

$$\int dx\, f(x)\, \delta\left(g(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \tag{1.4}$$

がなりたつ. ただし $g'(x_i)$ は g の x_i での一階微分係数である.

例題 1.1: (1.3) と $g(x) = 0$ の解の近くでの $g(x)$ のテイラー展開の表式を用いて (1.4) を証明せよ. ただし $g(x) = 0$ の全てのゼロ点は一位, すなわち $g(x)$ の一階微分がその点でゼロでないと仮定する.

上記の関係は多重積分にも拡張でき, そのとき $\delta^n(x)$ は n 次元空間のデルタ関数をあらわす. デカルト座標では $\delta^n(x)$ は各々一つのデカルト座標に対応するような一次元デルタ関数の n 個の積である. このようなデルタ関数の積は次の関係を満たす.

$$\int d^n x\, f(x)\, \delta^n(x-a) = f(a)\,. \tag{1.5}$$

ただし a は n 次元空間中のある一点をあらわす. デルタ関数の上つき文字は, 以降文脈から明らかな時には省略することにする.

例題 1.2: n 次元体積要素を球座標であらわすと $d^n x = r^{n-1}\, dr\, d\phi\, \sin\theta_1\, d\theta_1 \cdots \sin^{n-2}\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2}$ となる, これを用いて球座標での $\delta^n(x)$ を一次元デルタ関数の積であらわせ.

1.2　完全性

汎関数を扱うことが量子過程を経路積分形式で取り扱う際に重要となる [5]. 汎関数の一般的概念は, 次の節で定義する. しかしながら汎関数はその名のしめすように関数によって構成されるもので, 多くの場合その関数は一般的な関数の集合の任意の要素である. したがって, この関数の一般的集合の任意の要素を簡潔に表現する方法があれば大変役に立つ. それには完全性の

性質を使えばよい. 完全性とは考えている関数をすでによく分かっている関数の部分集合を用いて無限級数の形で書いたり, これらの関数を含む積分の形で書き表すことができるという性質である. 例えば, $f(x)$ は区分的に連続で $x = (-L, L)$ の間隔で周期性のある実関数の一般的な集合の要素であるとする. フーリエ級数の理論 [6] でよく知られているように, このような関数は次のように書き表すことができる.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} = a_0$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n + a_{-n}) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + (b_n - b_{-n}) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}. \qquad (1.6)$$

ただし係数は次式で与えられる.

$$a_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (1.7)$$
$$b_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) . \qquad (1.8)$$

このとき関数の組 $\{\sin(n\pi x/L), \cos(n\pi x/L)\}$ は**完全** (complete) であると言う. すなわち, これは $x = (-L, L)$ の間隔で周期的で区分連続などんな関数の集合の要素を構成するのにも十分な関数の集合である.

この形式はベクトル空間での任意のベクトルを単位基底ベクトルで表す形式とまったく同じである. いかなるベクトル空間においても内積が存在するので任意のベクトルをそのようにあらわすことが可能なのである. この内積は二つのベクトルの相手のベクトルへの射影あるいは “重なり” を決定するものである. したがって, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ が二つのベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が**直交** (orthogonal) する必要十分条件である. $\mathbf{e}_i$ を内積の意味で**規格直交** (orthonormal) ベクトルの組とすると, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ となる. δ_{ij} の記号はクロネッカーのデルタで $i = j$ のとき 1 でそれ以外のときはゼロである. 今考えている空間の任意のベクトル $\mathbf{x}$ が基底ベクトルの和として次のように書き表すことができると

すると,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \tag{1.9}$$

と書ける. ただし $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$ である. この式より, $\{\mathbf{e}_i\}$ の組はベクトル空間で完全直交系をなしていることになる. デカルト座標のとき $\{x_i\}$ は, ベクトルの先端の座標である.

この単純な考え方をフーリエ級数へ拡張するには, 内積を関数を含むように一般化すればよい. 関数の内積の定義は, ベクトルのときと同様にすればよい. このために $x = (-L, L)$ の周期をもつ二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積を次のように定義する.

$$f \cdot g \equiv \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, f^*(x)\, g(x)\ . \tag{1.10}$$

ただし f^* は f の複素共役である. この定義は内積のもつ次のような一般的な性質を満たす: $f \cdot f > 0$ （ノルムが正定値）, $(f+g) \cdot (f+g) \geq f \cdot f + g \cdot g$ （三角不等式）, $|f \cdot g|^2 \leq (f \cdot f)(g \cdot g)$ （コーシー・シュワルツの不等式）. この定義を使うと (1.6) のフーリエ級数で使用されているサインやコサイン関数は n で区別される無限次元正規直交系をなすことがわかる. これは, これらの関数の積分が以下の関係式を満たしていることからわかる.

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \delta_{mn} \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \delta_{mn}\ . \tag{1.13}$$

ただし $m, n > 0$. ゆえに, これらの関数のどの二つの内積の結果もベクトル空間での基底ベクトルの内積と一致する. (1.7) や (1.8) を使って得られる $a_n + a_{-n}$ や $b_n - b_{-n}$ は, $f(x)$ の基底関数への射影をあらわしている. そうすればフーリエ級数は有限次元ベクトル空間でのベクトルの成分表示を無限次元空間に一般化したものとみなすことができる. 周期関数の空間で, サイ

ンやコサイン関数は直交基底ベクトルの役割をなし, 完全系を張る. このとき $a_n + a_{-n}$, $b_n - b_{-n}$ は関数空間での関数の座標とみなすことができる. ここで細かな議論は省略するが, 実際には前節で述べた有限次元ベクトル空間とこの節で述べた無限次元関数空間はヒルベルト空間 (Hilbert space) の例となっている [7].

1.1 節で出てきたデルタ関数は, フーリエ級数を使って表現できる. $x, y \in (-L, L)$ とすると, (1.6), (1.7) および (1.8) より,

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right\} \qquad (1.14)\end{aligned}$$

となる.デルタ関数のこの表現から, それ自身が周期的であることは明らかである. したがってテスト関数の空間はこの周期をもつ周期関数の組に制限される.異なった周期をもつ関数と (1.14) をかけて $-L$ から L の間で積分すると, (1.1) は必ずしも満たされない.

例題 1.3: デルタ関数の周期的な形 (1.14) を用いて次式をしめせ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(x-y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(y+2nL)\ . \qquad (1.15)$$

特定の性質をもつ関数の集合に対しては, それを表すのに必要な基底ベクトルは限定される. 例えば反転対称性をもつ関数 $f(-x) = f(x)$ の展開式の中にサインの項は必要ない.結果としてテスト関数空間がこの部分集合に限られるなら, デルタ関数を表現するのにコサインの項しか必要ない.

多くの場合, 関数は周期性を持たないが, これを言い換えると, 周期は無限大であると言うことができる. この場合は, 数学的には上の表式で $L \to \infty$ とすることによってあらわすことができる. この極限では (1.14) の和は次の積分に書き換えることができる.

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-y)}\ . \qquad (1.16)$$

例題 1.4: (1.16) を導け.

$f(x)$ に関して (1.1) の性質を使うと容易に,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{ikx} \tag{1.17}$$

が得られる. ただし $\tilde{f}(k)$ は $f(x)$ のフーリエ変換と呼ばれ, 次式で与えられる.

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \ . \tag{1.18}$$

(1.17) によると e^{ikx} は関数の連続的な集合を与え, この集合は非周期的関数空間に対して完全であることがわかる. 一般的に関数の組が完全であるということをしめすのに (1.14) や (1.16) が使われる. (1.1) に (1.14) か (1.16) を代入することによって任意の関数のフーリエ級数やフーリエ変換を得ることができる. しかしながら, この二種類のデルタ関数の定義はまったく異なっている. この本では議論をより正しく進めるために (1.1) から出発した. このときに e^{ikx} が複素関数である, つまりテスト関数の空間には複素関数も含まれている, ということに注意することが重要である. 以降, フーリエ積分の積分範囲が無限遠のときには積分範囲をあらわに書かない.

例題 1.5: $f(x)$ は原点 $x = 0$ を含む開区間で正則な関数の集合の要素とする. そのようなテスト関数に対して,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \exp(-\alpha x^2) = f(0)$$

が成立する, すなわちこの型の指数関数の極限は $\delta(x)$ のように振舞うことをしめせ.

フーリエ級数やフーリエ変換は単に自由度をつけ加えることにより多次元に一般化できる. 非周期的な関数についての n 次元デルタ関数は次のように書ける.

$$\delta^{n}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k\, e^{ik\cdot(x-y)} \ . \tag{1.19}$$

ただし x, y, k はここで考えている空間のベクトルであり，積分は全 k 空間で実行する．このデルタ関数の形は(1.16)〜(1.18)の形を多次元に拡張するのに使われる．つまり積分することによってその関数のフーリエ変換を定義するのに使われる．

一つのベクトル空間に多くの正規基底ベクトルの組があるのと同様，一つの関数空間に多くの関数の完全系が存在する．完全系はしばしば計算が簡単になるように選んだり，考えている系がもつ対称性を最もよく利用できるように選んだりする．しかしながらこれらの関数の完全系の最も重要な特徴は，多くの場合エルミートな微分演算子に対する**固有値**(eigenvalue)問題の解となっていることである．このことは一次元の微分演算子 $D(x)$ を使ってあらわすことができる．この演算子は x と微分の組み合わせからできており，二つの適当な関数に対して次の性質がある．

$$\int dx\,\Big(D^*(x)f^*(x)\Big)\,g(x) = \int dx\,f^*(x)\,\Big(D(x)g(x)\Big)\ . \tag{1.20}$$

ただし D^* は D の複素共役．D が(1.20)を満たせば D は**エルミート**(Hermitian)であると言う．(1.20)の f と g は二つの関数空間を決定する．もしこれらの二つの関数空間が一致するなら，D は自己共役であると言う．例えば $i\partial/\partial x$ はエルミートであるが，$\partial/\partial x$ はエルミートでない．多くの物理量はエルミートな微分演算子，特に二階線形エルミート微分演算子によってあらわされている．それらによって書かれる固有値問題，

$$D(x)\varphi_n(x) = \lambda^{(n)}\varphi_n(x) \tag{1.21}$$

の解は，固有関数 ϕ_n ，固有値 $\lambda^{(n)}$ に対して適当な境界条件を与えると，

$$\int dx\,\varphi_n^*(x)\varphi_m(x) = \delta_{nm} \tag{1.22}$$

と規格直交系をなし，

$$\sum_n \varphi_n^*(x)\varphi_n(y) = \delta(x-y) \tag{1.23}$$

と完全系を張ることが知られている．一般に完全性は固有関数のフーリエ級数のような級数が，一般のクラスに属する任意の関数に収束することをしめすことによって証明される．実際の証明はここでは与えない．

> **例題 1.6**: エルミート演算子の固有値は全て実数であること，および異なる固有値をもつ固有関数は直交することをしめせ．

例えばエルミートな微分演算子として $D = \partial^2/\partial x^2$ を考える．固有関数 ϕ_n を周期的境界条件のもとで解くと，フーリエ級数を考える際に出てきた固有値 $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$ をもつサインやコサイン関数になる．$D = i\partial/\partial x$ という別の例を考える．固有値が実数であることを要求すると，固有値 k をもつ固有関数 e^{ikx} の完全系を得ることができる．つまり演算子がエルミートで固有値が実数であるということを組み合わせると，固有関数が完全であることをたやすく導きだすことができる．

固有関数の集合は離散的な固有値をもつ固有関数の集合と連続固有値をもつ固有関数の集合の両方をもつ場合がよくあることを最後に注意しておく．この事実には純粋に物理的な背景がある．例えば量子力学の場合，微分演算子の離散的固有値をもつ固有関数の組は，負エネルギーの束縛状態に対応し，連続固有値は，正エネルギーの散乱状態に対応する．このように系には粒子を束縛したり散乱したりするポテンシャルが存在するので，量子力学系が離散的な固有値，および連続な固有関数の両方を解として持つことは当然である．一次元の系で $\{\varphi_k(x)\}$ を連続的な組，$\{\varphi_n(x)\}$ を不連続な組とすると，完全性は次のように書き表すことができる．

$$\int dk\, \varphi_k^*(x)\varphi_k(y) + \sum_n \varphi_n^*(x)\varphi_n(y) = \delta(x-y)\ . \tag{1.24}$$

1.3　汎関数

実関数とはある空間から実数への写像である．前節に述べたように関数自

身を無限次元空間の点とみなすことができる．この類似性を使うと汎関数は関数や関数の多項式を数へと写像するものと定義できる．関数は汎関数によって写像される座標の役割を果たす．いくつかの関数やそれらの関数の積を，引数のある決まった区間で積分するのが汎関数を構成する標準的な方法である．

汎関数を**停留** (extremize) させるような関数は，歴史的には変分計算によって決められてきた [8]．関数の極値を求める手法との類似から，汎関数を停留させるような関数の決定には汎関数微分の定義が必要である．このような定義を決めるのに，まずはじめは汎関数がただ一つの関数 $g(x)$ にのみ依存し $\mathcal{F}[g(x)]$ のように書かれている最も簡単な場合で考えてみる．$\mathcal{F}$ の $g(x)$ による汎関数微分を，形式的に次のように定義する [9, 10]．

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta g(y)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathcal{F}[g(x)+\epsilon\delta(x-y)]-\mathcal{F}[g(x)]}{\epsilon}\,. \tag{1.25}$$

ただし $\delta(x-y)$ は積分の次元に合った次元をもつデルタ関数である．

例題 1.7: (1.25) を用いて汎関数 $\mathcal{F}[\,g(x)] = \int_a^b dx\,[\,g(x)\,]^n$ の汎関数微分が $y\in(a,b)$ の場合，

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta g(y)} = n[\,g(y)\,]^{n-1} \tag{1.26}$$

となり，また，$y\notin(a,b)$ の場合にはゼロになることをしめせ．

(1.25) の定義は標準的な微分演算子が持つ性質を全て持っている．例えば二つの関数 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の積の汎関数微分は，

$$\frac{\delta(\mathcal{F}\mathcal{G})}{\delta g(x)} = \mathcal{G}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta g(x)} + \mathcal{F}\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta g(x)} \tag{1.27}$$

というライプニッツ則 (Leibniz property) を満たす．

もし $\mathcal{F}[g]$ が関数空間の $g=0$ の周りの領域で振舞いのよい汎関数であるならば，汎関数 $\mathcal{F}$ は次のようにテイラー展開できる．

$$\mathcal{F}[g] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\,g(x_1)\cdots g(x_n)\;\left.\frac{\delta^n\mathcal{F}[g]}{\delta g(x_1)\cdots\delta g(x_n)}\right|_{g=0}. \tag{1.28}$$

ただし今後積分の範囲は省略する. (1.28) の両辺を任意の回数で汎関数微分し, $g=0$ とすると自明な恒等式が得られ, (1.28) が首尾一貫したものであることがわかる. 他の関数の周りでの汎関数テイラー展開は,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g] \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \; [g(x_1) - f(x_1)] \cdots \\ &\times \; [g(x_n) - f(x_n)] \; \left. \frac{\delta^n \mathcal{F}[g]}{\delta g(x_1) \cdots \delta g(x_n)} \right|_{g=f} \end{aligned} \tag{1.29}$$

と書ける. (1.29) により汎関数は汎関数微分がよく定義されている関数の周りで展開することができる.

(1.29) はまた,汎関数微分の別の定義としても使える [11]. $\delta g(x)$ を $g(x)$ からの無限小の変分であるとする,すなわち $g(x) + \delta g(x)$ はどんな x に対しても $g(x)$ に無限に近いとすると汎関数のテイラー展開は,

$$\mathcal{F}[g + \delta g] \approx \mathcal{F}[g] + \int dx \; \left. \frac{\delta \mathcal{F}[g]}{\delta g(x)} \right|_{\delta g = 0} \delta g(x) \tag{1.30}$$

のように書ける. ただし $(\delta g)^2$ およびそれより高次の項は無視できるものとして落とした. 引数の無限小の変分のもとでの汎関数 $\mathcal{F}$ の変化分は,

$$\delta \mathcal{F}[g] \; \equiv \; \mathcal{F}[g + \delta g] - \mathcal{F}[g] = \int dx \, \frac{\delta \mathcal{F}[g]}{\delta g(x)} \, \delta g(x) \tag{1.31}$$

と定義できる. (1.31) の定義は多変数関数の通常の微分とまったく同じである. その場合, 関数 $f(x)$ の微分は座標が任意の微小量 dx （多変数の場合は dx を無限小ベクトルとして扱う）変化したときの変化と定義される. ゆえに $f(x)$ の微分は,

$$df(x) = f(x + dx) - f(x) = \nabla f(x) \cdot dx \tag{1.32}$$

と書ける.ただし ∇ は勾配演算子で,デカルト座標では $\nabla = \Sigma_i \mathbf{e}_i (\partial / \partial x_i)$ と書きあらわされる. 関数空間の内積 (1.10) の形から (1.31) の結果は (1.32) と同じである. ゆえに $\delta g(x)$ は dx の役割をし,汎関数微分は実質的に汎関数の勾配になっている.

連鎖微分則の汎関数形は f の汎関数 g , $g = g[f]$ の汎関数 $\mathcal{F}[g]$ の微分則になっている. 二回連続して微分し,

$$\delta\mathcal{F} = \int dx \, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta g(x)} \delta g(x) = \int dx \, dy \, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta g(x)} \frac{\delta g(x)}{\delta f(y)} \delta f(y) \tag{1.33}$$

を得る. 変分の標準的な形(1.31)と比べると,

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f(y)} = \int dx \, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta g(x)} \frac{\delta g(x)}{\delta f(y)} \tag{1.34}$$

となる.

二つ以上の関数の汎関数にこれら全ての定義をたやすく拡張できる. 添え字によって区別されている一組の関数 $\{g_i(x)\}$ を引数に持っている汎関数 $\mathcal{F}$ を考える. このとき, **和の規約形** (summention convention) を使うと便利である. この規約形では式の中に出てきた一組の添え字は一方の添え字が括弧でくくられていないかぎり, 添え字の全ての範囲について和をとると解釈する. 例をしめすと, 二つの n 次元実ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の内積はデカルト座標を使って次のように書ける.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \, . \tag{1.35}$$

しかしながら $\lambda^{(i)} x_i$ のような書き方をしたときには単に $\lambda^{(i)}$ と x_i の積をあらわしており, 添え字について和を**とらない**. また, 式が複雑に入り組んで混乱する場合には, 和の記号をあらわに書く. 和の規約形を使うと, 多関数の汎関数の微分は,

$$\delta\mathcal{F}[g_1, \ldots, g_n] = \int dx \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta g_j(x)} \, \delta g_j(x) \tag{1.36}$$

と書ける. ただし j は 1 から n までの値をとる.

ニュートン力学のラグランジアン形式は, 汎関数の方法の物理に対する最も初期の応用例の一つであり, 大変よい例である [12]. 最も簡単で自明でない例に, 質量 m を持ち保存力 $F(x)$ のもとで一次元空間の中の点粒子の運動がある. ニュートンの運動の法則によると,

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1.37}$$

がなりたつ. ただし $V(x)$ は力にともなうポテンシャルエネルギーで, $\ddot{x}$ は x の時間 t による二階微分である. 適当な初期条件を(1.37)の解にあてはめると粒子の軌跡をあらわすような関数 $x = x(t)$ が一意的に決まる. 与えられた初期条件のもとでのニュートンの運動方程式の解は**古典的軌跡** (classical trajectory) と言われる.

力学のラグランジュ形式では(1.37)の運動方程式はそれほど重要でなく, むしろ粒子の運動からの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーで書きあらわされる作用汎関数が重要である. この作用汎関数とは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差で定義されるラグランジアン密度を単に積分したものである. (1.37) で定義される簡単な例では作用汎関数は次のように書くことができる.

$$S[x(t), t_a, t_b] = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(x, \dot{x}) = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right] . \qquad (1.38)$$

ただし t_a と t_b は粒子の運動の時間間隔である. この式で $x(t)$ は時間の任意の関数である. ひとたびよい振舞いをする $x(t)$ が選ばれると作用汎関数はある値をもつ.

ニュートンの運動方程式は, 関数 $x(t)$ が作用を停留させるということを要請して得られる. 関数と汎関数の類似性をつかうと, これは停留点 $x(t)$ の周りで作用の変分がゼロとなることを要請するのと同等である.

$$\frac{\delta \dot{x}(t')}{\delta x(t)} = \frac{d}{dt'}\delta(t' - t) \qquad (1.39)$$

と汎関数の連鎖定理(1.34)を使うと, 停留点を与えるような関数は次のように選ばなくてはならない.

$$\delta S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \left[\frac{\delta S}{\delta x(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\delta S}{\delta \dot{x}(t)}\right] \delta x(t) = 0 . \qquad (1.40)$$

ただし $\delta x(t)$ は任意の $t = t_a$, $t = t_b$ でゼロになるような無限小変分である. 例題1.7の結果を使うと, 作用を停留させるような $x(t)$ の形はニュートンの

運動方程式を一般化したオイラー・ラグランジュ方程式,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{1.41}$$

に従うことがわかる. 汎関数微分と汎関数全微分の定義を使うと変分計算は簡単にできる. この計算手法は,汎関数の停留点を見つけるという問題を解くために発展したものである.

もし力学で作用汎関数を使用する目的がすでに知っている運動方程式を導き出すためだけならば,それにはあまり意味はない. しかしながら,作用を使って物理系の運動を定式化する方法は単なる運動方程式以上にはるかに多くの情報をもたらす. まずはじめに作用汎関数は系の**大域的**(global)な構造を反映しており, 同時に停留条件から**局所的**(local)な微分方程式も導かれる. 作用は粒子の完全な軌跡の寄与から構成されているという意味で大域的なものであり,ゆえに,粒子の運動の「歴史」を記録しているものである. 二番目に, (1.41)の古典解は作用を停留させるが, 作用はそれ以外の**どんな**軌跡に対しても求めることができる. この性質は量子過程で特に重要になることを後にみる. 三番目に, 作用の方法は粒子の位置に正準共役な運動量の定義を与え, エネルギーを一般化したものとして知られているハミルトニアンはラグランジアンのルジャンドル変換によって得られる. 四番目に, 作用は系のもつ**古典的**な対称性に関する情報を全て含んでおり, これらは古典的軌跡が持つ保存則を満たす. 結局, 作用を用いる方法は物理系のダイナミクスを定式化するもっとも簡潔で系統的な方法であるといえる.

ハミルトニアンの一般形を構成するために, ラグランジアン密度を n 個の一般化座標の組 $q = \{q_i\}$ と速度 $\dot{q} = \{\dot{q}_i\}$ で書きあらわす.運動量 p_i は座標 q_i の正準共役量で,

$$p_i(t) \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{q}_i(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i(t)} \tag{1.42}$$

と定義する. (1.42)が解けて全ての $\dot{q}_i$ が $2n$ 個の変数 $\{p_i, q_i\}$ であらわされる, すなわち $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q)$ となるとする. そうするとハミルトニアン $H(p, q)$

はルジャンドル変換によって,

$$H(p,q) = p_i \dot{q}_i(p,q) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(p,q)) \tag{1.43}$$

と定義できる. (1.41) と (1.42) より古典的な軌跡に沿っては,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{1.44}$$

がなりたち, $\mathcal{L}$ があらわに時間に依存しなければ H は保存量であることがわかる. ゆえにハミルトニアンは古典的な系の運動にたいするエネルギーの一般化とみることができる.

(1.42) の定義を使って作用汎関数を自由度 $2n$ の変数 p と q を用いて書き換えることができ, 次式のようになる.

$$S[p,q,t_b,t_a] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[p_i \dot{q}_i - H(p,q) \right] \equiv \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(p,q)\,. \tag{1.45}$$

ここで再び p と q の変分に対して $\delta S = 0$ を要求すると,

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] = 0 \tag{1.46}$$

を得る. 変分 δp_i と δq_i は独立なので, (1.41) のオイラー・ラグランジュ方程式より得られた n 個の二階微分方程式は $2n$ 個の一階微分方程式,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.47}$$

になる. これらはハミルトンの運動方程式として知られている.

(1.38) と (1.45) の両方の形はどちらも同じ力学系をあらわしている. しかしこの二つの書き方には重要な違いがある. 運動量（速度）に依存する拘束があるような系を考えるときには (1.45) の形がより便利である. なぜなら (1.45) の形には p と q の両方があらわれており, 変数の正準変換をしたときもこの形からはじめることができるからである. 正準変換は1.5節で議論するようにヤコビアンが 1 に等しい変数 p , q の変換として定義できる.

正準変換はポアッソン括弧を不変に保つような p , q の変換であると定義してもよい. 古典力学では, 任意の二つの関数 $A(p,q)$ と $B(p,q)$ のポアッソン括弧は反対称演算として次のように定義される.

$$\{A,B\}_{p,q} \equiv \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\,. \tag{1.48}$$

ポアッソン括弧の定義とハミルトンの運動方程式より,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A,H\}_{p,q} \tag{1.49}$$

および

$$\{q_j\,,p_k\}_{p,q} = \delta_{jk} \tag{1.50}$$

が得られる. 量子力学にもっていくにはポアッソン括弧を交換子に変えればよい（2.1節を参照）. ポアッソン括弧は古典的な p , q の振舞いからそれらの量子力学的な振舞いを構成するという重要な性質をもつ. このことが汎関数の方法を大変意味のあるものにしている.

1.4　行　列

この節では, 行列と行列式について簡単に復習する [13]. 一般の行列 $\mathbf{M}$ は, 行列 $\mathbf{M}$ の**要素** (elements) と呼ばれる複素数の $n \times m$ の配列である. この本では $n \times n$ 正方行列 $\mathbf{M}$ (n は行列の**次元** (dimension)) と一列だけの $n \times 1$ 行列 $\mathbf{x}$ のみを扱うことにする. ただし $\mathbf{x}$ はベクトルを成分表示したときと同じ形をしているので, これをベクトルと呼ぶ. 行列の各成分を M_{ij} と書き, ベクトルの成分は x_i と書く. つまり i は行を j は列をあらわす. すべての成分が実数であるときその行列を**実行列** (real matrix) と言う. 互いに各々の全ての成分が一致するとき二つの行列は等しいと言う. 行列 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ の和の成分は成分の和に等しい.

$$(\mathbf{M}+\mathbf{N})_{ij} = M_{ij} + N_{ij}\,. \tag{1.51}$$

また, 二つの行列の積の成分は和の規約形で次のように書ける.

$$(\mathbf{MN})_{ij} = M_{ik} N_{kj} \,. \tag{1.52}$$

二つの行列の**交換子** (commutator) は次のように定義する.

$$[\mathbf{M}, \mathbf{N}] \equiv \mathbf{MN} - \mathbf{NM} \,. \tag{1.53}$$

行列 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ が $[\mathbf{M}, \mathbf{N}] = 0$ を満たすとき**可換** (commute) であると言う.

この節では有限次元実ベクトル空間を複素成分をもつベクトルに拡張する. このために二つのベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の内積は $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i^* y_i$ で定義する. この定義はゼロでないベクトルのノルムが正となることを保証する. 二つのベクトルが $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ を満たすとき直交すると言う.

欠くことのできないものにレビ・チビタの記号 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\cdots}$ がある. これはそれぞれ $\{1, \ldots, n\}$ の値をとる n 個の添え字をもち, 完全反対称である. つまり $\{1, \ldots, n\}$ に対して集合 $\alpha, \beta, \ldots$ が偶置換ならば $+1$ に奇置換ならば -1 になる. レビ・チビタの記号は完全反対称なので二つの添え字が一致するとゼロになる. $n \times n$ 行列の行列式は次のように定義される.

$$\det \mathbf{M} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\cdots} M_{1\alpha} M_{2\beta} M_{3\gamma} \cdots \,. \tag{1.54}$$

行列式が 1 の行列は**ユニモジュラ** (unimodular) と呼ばれている.

> **例題 1.8**: (1.54) の定義を用いて
>
> $$\det \mathbf{M} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\cdots} M_{\alpha 1} M_{\beta 2} M_{\gamma 3} \cdots \tag{1.55}$$
>
> がなりたつこと, および $\det(\mathbf{MN}) = \det \mathbf{M} \det \mathbf{N}$ をしめせ.

行列に関係する他の重要な数にトレースがある. 行列 $\mathbf{M}$ のトレースは $\mathrm{Tr}\,\mathbf{M}$ のようにあらわし, 次の式で与えられる.

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{M} = M_{ii} \,. \tag{1.56}$$

行列の積のトレースは, その積の順序を**サイクリック** (cyclic) に回しても変わらない.

例題1.9: $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\cdots\mathbf{M}_n) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{M}_n\mathbf{M}_1\cdots\mathbf{M}_{n-1})$ をしめせ.

$\mathbf{I}$ であらわされる単位行列の行列成分は, $I_{ij} = \delta_{ij}$ である. $\mathbf{IM} = \mathbf{MI} = \mathbf{M}$ をしめすのはたやすい. したがって $\mathbf{I}$ はすべての行列と可換である. 行列 $\mathbf{M}$ に対して $\mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$ がなりたっているとき $\mathbf{M}_L^{-1}$ は行列 $\mathbf{M}$ の**左逆行列** (left inverse) と言う. $\mathbf{M}\mathbf{M}_R^{-1} = \mathbf{I}$ がなりたつときは $\mathbf{M}_R^{-1}$ を**右逆行列** (right inverse) と言う. 一般的には $\mathbf{M}_R^{-1} = \mathbf{M}_L^{-1}$ と仮定する. 明らかに, $\det\mathbf{I} = 1$, $\mathrm{Tr}(\mathbf{I}) = n$ がなりたつ. 例題1.8 より $\det\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \det\mathbf{M}\det\mathbf{M}^{-1} = 1$ がなりたつ. したがって $\det\mathbf{M} \neq 0$ のときのみ $\mathbf{M}^{-1}$ が存在する.

微分演算子が関数に作用することとの類似から, 正方行列はベクトルの空間に作用する演算子とみなすことができる. $\mathbf{M}$ は $n \times n$ 行列と仮定すると固有ベクトル $\mathbf{x}$ は次式を満たす.

$$\mathbf{Mx} = \lambda\mathbf{x}\,. \tag{1.57}$$

ただし,(1.21) との形式的な類似より λ を $\mathbf{M}$ の固有値と呼ぶ. 各固有値は次の方程式を満たすことをしめすことができる.

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0\,. \tag{1.58}$$

(1.58) は n 次の多項式なので $n \times n$ 行列に対して高々n 個の異なった固有値がある. いったん行列の固有値が分かれば, (1.57) から固有ベクトルを得るには単に代数方程式を解けばよい. ゆえに固有ベクトルは全体にかかる定数を別にして一意的に決定できる. しかしこの定数は固有ベクトルを $x_i^* x_i = 1$ のように規格化することによって固定できる. 以降全体にかかる複素係数は**位相** (phase) として扱う.

任意の $n \times n$ 行列 $\mathbf{M}$ が与えられると, 行と列を入れ替えることにより二つの新しい行列を定義できる. 行列 $\mathbf{M}$ の**転置** (transpose) を $\mathbf{M}^T$ と書き, その成分は $(\mathbf{M}^T)_{ij} = M_{ji}$ で与えられる. ベクトルまたは $n \times 1$ 行列はの転置をとると $1 \times n$ 行列になる. 行列 $\mathbf{M}$ の**エルミート共役** (Hermitian adjoint) を

$\mathbf{M}^\dagger$ と書き, その成分は $(\mathbf{M}^\dagger)_{ij} = M^*_{ji}$ で与えられる. ベクトルまたは $n \times 1$ 行列はエルミート共役をとると,元のベクトルの成分の複素共役で与えられる成分をもつ $1 \times n$ 行列になる. $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ がランクの等しい正方行列であるならば, $(\mathbf{MN})^T = \mathbf{N}^T\mathbf{M}^T$ や $(\mathbf{MN})^\dagger = \mathbf{N}^\dagger\mathbf{M}^\dagger$ は簡単に証明できる.

これらの定義を使うと行列は以下のように分類できる. もし行列 $\mathbf{O}$ が $\mathbf{OO}^T = \mathbf{I}$ すなわち $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$ を満たすなら $\mathbf{O}$ を**直交** (orthogonal) 行列と言う. 行列 $\mathbf{S}$ が $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ を満たすなら $\mathbf{S}$ を**対称** (symmetric) 行列と言う. 行列 $\mathbf{A}$ が $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ を満たすなら $\mathbf{A}$ を**反対称** (antisymmetric) 行列と言う. 行列 $\mathbf{UU}^\dagger = \mathbf{I}$ すなわち $\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$ を満たすなら, 行列 $\mathbf{U}$ を**ユニタリー** (unitary) 行列と言う. $\mathbf{H}$ が $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$ を満たすなら行列 $\mathbf{H}$ を**エルミート** (Hermitian) 行列と言う.

ユニタリー行列 $\mathbf{U}$ を用いて次式で定義される**ユニタリー変換** (unitary transformation) により, $n \times n$ 行列 $\mathbf{M}$ は行列 $\mathbf{M}'$ に変換される.

$$\mathbf{M}' = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{MU}\,. \tag{1.59}$$

行列 $\mathbf{M}$ がユニタリー, 直交あるいはエルミート行列ならば, 変換後の行列 $\mathbf{M}'$ も同じ性質をもつ. さきほどの結論により, $\det\mathbf{M}' = \det\mathbf{M}$ と $\mathrm{Tr}\,\mathbf{M} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{M}'$ がなりたつことがわかる.

(1.57) の解になっている n 個の規格固有ベクトルを $\{\mathbf{x}^{(j)}\}$ と書き, $\mathbf{x}^{(j)}$ の各成分を $x_i^{(j)}$ と書く.

例題 1.10: もし $\mathbf{M}$ がエルミート行列ならば,その固有値は実数で, 異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを証明せよ.

例題 1.11: 実反対称行列の固有値は純虚数であること,および $n \times n$ 実反対称行列の行列式は n が奇数ならばゼロになることを示せ.

例題 1.10 の結果より,エルミート行列 $\mathbf{M}$ の固有ベクトルの成分から構成される行列, すなわち $U_{ij} = x_i^{(j)}$ という成分をもつ行列 $\mathbf{U}$ はユニタリー行

列である. $\mathbf{M}$ の $\mathbf{U}$ でユニタリー変換された行列の成分は次のようになる.

$$(\mathbf{U}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{U})_{ij} = \lambda^{(j)} \delta_{ij} \,. \tag{1.60}$$

ただし $\lambda^{(j)}$ は $\mathbf{M}$ の j 次の固有値である. つまり, ユニタリー変換された後の行列は対角成分のみ残り, 非対角成分はゼロになる. (1.60) の関係式とユニタリー変換に対する行列式とトレースの不変性より, 次式がなりたつ.

$$\det \mathbf{M} = \prod_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} \tag{1.61}$$

$$\mathrm{Tr}\, \mathbf{M} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} \,. \tag{1.62}$$

ゆえに単にゼロ固有値が存在しないことが逆行列が存在するための必要十分条件である.

関数のテイラー展開の形を用いて行列の関数を定義することができる. 行列の指数関数は巾級数を使って次のように書ける.

$$\exp \mathbf{M} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{M}^n \,. \tag{1.63}$$

ただし, $\mathbf{M}^n$ は $\mathbf{M}$ を n 回かけたものをあらわす. この例から明らかなように巾級数の中に元の行列を代入して出てきた行列の関数の成分は, 元の行列が対角行列であるときのみ元の行列の成分の関数に一致する. 巾展開が定義できていないときには, この展開を他の点の周りでの展開で定義してもよいことにする. 例えば, 対数関数は引数がゼロの周りでは定義できないので, $\ln \mathbf{M}$ の巾級数表示は他のゼロでない行列, 特に単位行列 $\mathbf{I}$ のまわりでその行列を展開することにより定義されるべきである. よって関数 $\ln \mathbf{M}$ は次のように書ける.

$$\ln \mathbf{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} (\mathbf{M} - \mathbf{I})^n \,. \tag{1.64}$$

例題 1.12: エルミート行列 M は次の関係式を満たすことを示せ.

$$\det \mathbf{M} = \exp(\mathrm{Tr}\ \ln \mathbf{M})\,. \tag{1.65}$$

ここで役に立つ定理を述べておこう. $\mathbf{C}$ を二つの行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ の交換子すなわち $\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, かつ, $\mathbf{C}$ が $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の両方と可換つまり, $[\mathbf{C}, \mathbf{A}] = [\mathbf{C}, \mathbf{B}] = 0$ とすると次のベーカー・キャンベル・ハウスドルフの定理 (Baker-Cambell-Hausdorff theorem)[14] がなりたつ.

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}) \exp(\mathbf{B}) \exp(-\tfrac{1}{2}\mathbf{C})\,. \tag{1.66}$$

ただし $\exp(\mathbf{A}) \exp(-\mathbf{A}) = \mathbf{I}$ を利用している. この定理を証明するにはまず定理の前提条件によって成立する次の関係式をつかう.

$$[\,\mathbf{A}^n, \mathbf{B}\,] = n[\,\mathbf{A}, \mathbf{B}\,]\,\mathbf{A}^{n-1} = n\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\,. \tag{1.67}$$

指数関数のテイラー展開の形と (1.67) の結果を使うと, 実変数 α を用いて,

$$\exp(-\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \exp(\alpha\mathbf{A}) = -\alpha[\,\mathbf{A}, \mathbf{B}\,] \tag{1.68}$$

と書ける. すると,

$$\mathbf{F}(\alpha) = \exp(-\alpha\mathbf{B}) \exp(-\alpha\mathbf{A}) \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \tag{1.69}$$

で定義される関数は, 次の方程式を満たす.

$$\frac{d\mathbf{F}(\alpha)}{d\alpha} = -\alpha\mathbf{C}\,\mathbf{F}(\alpha)\,. \tag{1.70}$$

この微分方程式は,

$$\mathbf{F}(\alpha) = \exp(-\tfrac{1}{2}\alpha^2\mathbf{C}) \tag{1.71}$$

という解をもつ. したがって $\alpha = 1$ のとき解は,

$$\mathbf{F}(\alpha = 1) = \exp(-\mathbf{B}) \exp(-\mathbf{A}) \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(-\tfrac{1}{2}\mathbf{C}) \tag{1.72}$$

となる. よってベーカー・キャンベル・ハウスドルフの定理がなりたつ.

関数, ベクトル, 行列の間の類似性は大変役にたつ. 区間 $(-L, L)$ で定義されている一変数関数はベクトルとみなすことができる. これをしめすために (1.10) で定義される二つの関数の内積を区間 $(-L, L)$ を離散的に分割し内積をリーマン和に置き換えると,

$$f \cdot g = \int_{-L}^{L} dx\, f^*(x)g(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{2L}{N}\right) f^*(x_j)g(x_j) \tag{1.73}$$

となる.ただし $x_j = -L + j(2L/N)$ である. (1.73) の関係式の形はベクトルの成分で定義され, $2L/N$ の重みがかかっている二つの無限次元ベクトルの内積に似ている.

ベクトルや行列に対するこの類似性を二変数関数に広げる. $f(x, y)$, $g(x, y)$ を任意の関数とすると, 関数 $h(x, z)$ を,

$$h(x, z) = \int_{-L}^{L} dy\, f(x, y)g(y, z) \tag{1.74}$$

と定義できる. 区間 $(-L, L)$ を再び離散的にして,(1.74) をリーマン和で書くと,

$$h(x, z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{2L}{N}\right) f(x, y_j)g(y_j, z) \tag{1.75}$$

となり, これは二つの行列の積の形に似ている. この行列の解析方法はあまり厳密ではないが, この結果は関数や汎関数へと拡張できる. 関数 $f(x, y)$ は連続行列 f の x, y 成分とみることができる.

そのような見方では単位行列は,

$$\int_{-L}^{L} dy\, f(x, y)\, \delta(y - z) = f(x, z) \tag{1.76}$$

のようにデルタ関数であらわすことができる. 二変数関数の積のトレースは行列との類似から,

$$\mathrm{Tr}\, f^n = \int_{-L}^{L} dx_1 \cdots dx_n\, f(x_1, x_2) \cdots f(x_n, x_1) \tag{1.77}$$

と定義できる．関数を積分するとき積分の測度からくる次元によって結果の次元は異なることを注意しておく．ここで登場する積分の測度 dx は長さの次元を持つ．デルタ関数は (長さ)$^{-1}$ の次元を持つ．以下で関数 f をデルタ関数の周りで展開する際に，デルタ関数は (長さ)$^{-1}$ の次元を持っているので f の次元はそれに合っていなければならない．以下ではこの条件は満たされている．

(1.64), (1.65) および (1.77) を使うと，普通に出てくるようなタイプの関数の形式的な行列式の形を得ることができる．ここで関数は次の形をしていると仮定する．

$$f(x,y) = \sum_n a_n \varphi_n^*(x)\varphi_n(y)\,. \tag{1.78}$$

ただし，関数 $\{\varphi_n\}$ は完全正規直交系をなし，

$$\int dx\, \varphi_n^*(x)\varphi_m(x) = \delta_{nm} \tag{1.79}$$

を満たす．ここで a_n は次元をもたない任意の実数である．これらの関数の完全性より，

$$f(x,y) - \delta(x-y) = \sum_n (a_n - 1)\varphi_n^*(x)\varphi_n(y) \tag{1.80}$$

がなりたつ．関数と行列の類似より，$f(x,y) = f^*(y,x)$ がなりたつので f はエルミート行列とみなすことができる．そして，f の行列式は次式で与えられる．

$$\det f = \exp \mathrm{Tr} \ln f = \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}(-1)^{j+1}\mathrm{Tr}\,(f-\delta)^j\right\}\,. \tag{1.81}$$

関数 φ_n の正規直交性を使うとトレースはすぐに計算できる．

$$\mathrm{Tr}\,(f-\delta)^j = \sum_n (a_n - 1)^j\,. \tag{1.82}$$

(1.82) の結果を (1.81) に代入すると，

$$\det f = \exp\left[\sum_n \ln a_n\right] = \prod_n a_n \tag{1.83}$$

を得る．今までの結果を関数 f へ作用する微分演算子 $D(x)$ へ拡張すると以下のようになる．行列表示を使うと，

$$D(x)f(x) = \int dy\, D(x)\delta(x-y)f(y)\,, \tag{1.84}$$

と書くことができる．したがって $D = D(x)\delta(x-y)$ は微分演算子をあらわす行列である．もし $D(x)$ がエルミートで (1.79) を満たす正規直交固有関数の完全系 φ_n を持つなら，

$$D \equiv D(x)\delta(x-y) = \sum_n \lambda^{(n)}\varphi_n^*(x)\varphi_n(y) \tag{1.85}$$

となり，D は次元は異なるが (1.78) のエルミート行列の形をしている．したがって (1.83) より，

$$\det(D) = \prod_n \lambda^{(n)} \tag{1.86}$$

となる．これは有限次元行列の結果，(1.61) と一致する．

1.5　ガウス積分

多くの経路積分はガウス積分の積を評価することに還元される．すでに例題1.5で出てきたようにガウス積分は次のように計算できる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,. \tag{1.87}$$

ただし α は実数で正である．しかしながら経路積分のなかで出てくるガウス積分では α が純虚数であるときもある．このような場合にガウス積分をどのように評価するかが問題である．これを行なうためには複素解析を使わなければならない．よい機会でもあるのでこの複素解析法のいくつかの最も重要な部分を復習することにする[15]．

複素変数 z は $z = x + iy$ と書くことができ，複素平面は二つの変数 x と y から形成される．そうすると複素変数の関数は，

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \tag{1.88}$$

と書くことができる．もし関数 f がコーシー・リーマンの条件,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad ,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.89}$$

を満たすなら点 z で**解析的**(analytic)であると言う．もし関数 f がある点で解析的であるなら,その点での微分 df/dz は一意的に決まる．

複素変数の関数は複素平面上の経路にそって積分される．ただし経路にそった線要素は $dz=dx+idy$ で与えられる．特に閉じた経路は重要な役割を持つ．コーシーの積分定理によれば関数 $f(z)$ が複素平面上の閉じた右回りの経路 C の内部の全ての場所で解析的であるならば z_0 を経路の内部の点として,

$$\oint_C dz\,\frac{f(z)}{z-z_0}=2\pi i\,f(z_0) \tag{1.90}$$

がなりたつ．もし z_0 が経路の外にあるならば,積分はゼロになる．グルサの定理によると関数 $f(x)$ が境界 C 上およびその内部で解析的であるならば,

$$\oint_C dz\,f(z)=0 \tag{1.91}$$

がなりたつ．

> **例題 1.13**: コーシーの定理を使い，関数 $f(x)$ が複素平面上の閉じた領域 C で解析的であり,点 z_0 がその経路の内部にあるならば,
>
> $$\oint_C dz\,\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}=2\pi i\,\frac{1}{n!}\,\frac{d^nf(z)}{dz^n}\bigg|_{z=z_0} \tag{1.92}$$
>
> がなりたつことをしめせ．

関数 $f(z)$ は z_0 の近傍で,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{1.93}$$

のようにローラン展開できる．以上の結果は以下の留数定理を証明するのに使われる．

$$\oint_C dzf(z)=2\pi ia_{-1}\,. \tag{1.94}$$

z_0 が経路の内側にあり, 経路を含んだ領域ではローラン展開が収束するとする.

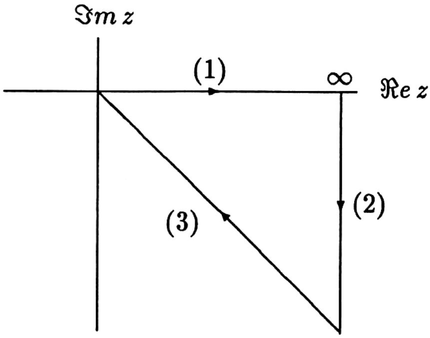


図 1.1　$e^{-i\alpha z^2}$ を積分する際の経路

α が虚数の場合の (1.87) のガウス積分は**解析接続** (analytic continuation) をすることにより得られる. これは α が実数で正である関数 $\exp(-i\alpha x^2)$ を複素平面上のあらゆる場所で解析的であり実軸上で元の関数になるような関数に拡張して得られる. $\exp(-i\alpha z^2)$ がそのような関数である. コーシー・リーマンの定理により関数 $\exp(-i\alpha z^2)$ は全複素平面で解析的であることがわかる. またこの関数は $z = x$ で元の関数に一致する. もし α が正であるならばこの関数は図 1.1 の経路に沿って積分される. 経路 (1) は実軸上を無限大まで伸びている. また経路 (3) は $y = -x$ であらわされている経路にそって伸びている. 経路 (1) に沿っては $\exp(-i\alpha z^2) = \exp(-i\alpha x^2)$ で $dz = dx$ である. 経路 (3) に沿っては $\exp(-i\alpha z^2) = \exp(-2\alpha x^2)$ で $dz = (1-i)dx = (2/i)^{1/2}dx$ である. 経路 (2) にそっての積分は $\exp(-2\alpha x|y|)$ で減少するので $x \to \infty$ で積分に効いてこない. $f(z)$ は全ての点で解析的であるので, グルサの定理より閉じた経路の積分はゼロになる. したがって経路 (1) と (3) の積分が関係して次のようになる.

$$\int_0^\infty dx\, e^{-i\alpha x^2} = \sqrt{\frac{2}{i}} \int_0^\infty dx\, e^{-2\alpha x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}}. \tag{1.95}$$

積分を実軸全体まで拡張すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}} \tag{1.96}$$

という最終結果を得る. これは(1.87)で α を $i\alpha$ に解析接続した結果と等しい. もし α が負ならば積分経路を上半面にとるべきである.その積分の結果は(1.96)に等しくなる.

ガウス積分を n 個の実変数に一般化すると,

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \exp(-x_i a_{ij} x_j) \tag{1.97}$$

となる.ただし a_{ij} は行列 $\mathbf{A}$ の成分. もし $I(a)$ が実数ならば行列 $\mathbf{A}$ は対称な実行列,つまりエルミートであるとしてよい.

(1.97)を計算するためには変数を行列 $\mathbf{U}$ で $x_i = U_{ij}y_j$ のようにユニタリー変換すればよい. 行列 $\mathbf{U}$ は $\mathbf{A}' = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{U}$ が対角行列になるようにえらぶ. 行列 $\mathbf{A}$ はエルミートなので1.4章の結果より行列 $\mathbf{U}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルから構成されており, 結果の行列 $\mathbf{A}'$ は対角成分が $\mathbf{A}$ の固有値で他の成分が全てゼロであるような行列である. 新しい変数で書くと積分は,

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_n\, J(y) \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} \lambda^{(i)} y_i^2 \right\} \tag{1.98}$$

となる.ただし $\lambda^{(i)}$ は $\mathbf{A}$ の i 番目の固有値で $J(y)$ は変換のヤコビアンである.

先に進む前にヤコビアンの性質について議論する. 積分変数を変えたときに積分の体積要素つまり新しい変数の測度を一定にするために新しい変数にはヤコビアンをかけておかなければならない. このことをあらわにみるために n 個の変数 x_i を考える. 変数をつけかえて x_i が新しい変数 y_i で次のように書けるとする.

$$x_i = x_i(y_1, \ldots, y_n)\,. \tag{1.99}$$

このような変数のつけかえで測度あるいは積分の無限小体積要素は,

$$dx_1 \cdots dx_n = J(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \tag{1.100}$$

となる. ただし J はヤコビアンで,

$$J(y_1,\ldots,y_n) = \det \frac{\partial x}{\partial y} \tag{1.101}$$

で与えられる. すなわちヤコビアンは i 行 j 列の成分が $\partial x_i/\partial y_j$ の行列の行列式である.

ユニタリー変換 $x_i = U_{ij}y_j$ に対してはヤコビアンは単に $J = \det \mathbf{U}$ である. 行列式とユニタリー変換の性質より,

$$1 = \det(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}) = \det\mathbf{U}^\dagger \det\mathbf{U} = |\det\mathbf{U}|^2 \tag{1.102}$$

が得られる. このことから位相因子 (絶対値が 1 の複素数) は別にして $\det\mathbf{U} = 1$ であることがわかる. 位相因子は $\mathbf{U}$ のもつ特徴を変えずに $\mathbf{U}$ の定義に吸収することができるので, ここでは無視する.

上の結果より $I(a)$ は単なるガウス積分の積になり, (1.61) を使うと,

$$I(a) = \pi^{n/2}\prod_{i=1}^{n}(\lambda^{(i)})^{-\frac{1}{2}} = \pi^{n/2}(\det\mathbf{A})^{-\frac{1}{2}} = (\pi^n \det\mathbf{A}^{-1})^{1/2} \tag{1.103}$$

となる. このときにはもちろん各々のガウス積分がよく定義されていると仮定している. このことは (1.103) に出てくるすべての固有値がゼロでなく正のときのみ正しい. $\det\mathbf{A} > 0$ であることが十分ではないが必要条件である.

もし (1.97) のガウス積分に i が掛かったならば, 積分を次のように解析接続しなければならない. 全体に掛る係数 α を実積分に導入すると,

$$I(\alpha, a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\cdots dx_n \exp(-\alpha x_i a_{ij} x_j) \tag{1.104}$$

となり, 求める積分は $I(\alpha = i, a)$ と解析接続して得られる. 実積分がよく定義されているとき解析接続した結果は (1.103) より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\cdots dx_n \exp(-ix_i a_{ij} x_j) = \left[(-i\pi)^n \det\mathbf{A}^{-1}\right]^{1/2} \tag{1.105}$$

となる. この解析接続は $\mathbf{A}$ の固有値がゼロでなく正である限り正しい.

最後に指数の中に変数の一次の項を含むような場合に拡張する．積分範囲は $\pm\infty$ なので平方完成することで積分は実行でき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2 \pm \beta x} = \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha(x \pm \frac{\beta}{2\alpha})^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \tag{1.106}$$

(1.106) を複素数まで拡張し (1.96) を使うと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\alpha x^2 \pm i\beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}}\exp\left(\frac{i\beta^2}{4\alpha}\right) \tag{1.107}$$

が得られる．

(1.103) の結果を x_i の一次の項を含むように拡張することはたやすいことである．これには (1.97) に出てくる x_i を $\beta_i/2$ だけずらすとよい．このとき β は n 次元ベクトルとして考える．積分範囲は $(-\infty, +\infty)$ なので積分はこの変換に対して不変である．ゆえに，

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \exp(-x_i a_{ij} x_j \pm \beta_i a_{ij} x_j - \frac{1}{4}\beta_i a_{ij}\beta_j) \tag{1.108}$$

となる．$b_i = \beta_j a_{ji}$ とし行列 $\mathbf{A}$ が逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を持ち，エルミートであるとすると，

$$\beta_i a_{ij}\beta_j = b_i(\mathbf{A}^{-1})_{ij} b_j \tag{1.109}$$

がなりたつことは容易にわかる．この結論を (1.108) に使うと (1.106) を n 次元に拡張した式，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \exp(-\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \pm \mathbf{b}^T\mathbf{x}) = \left(\frac{\pi^n}{\det \mathbf{A}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\right) \tag{1.110}$$

を得る．ただし結果を行列の形で書いた．同様の形を複素数に拡張したものも (1.108) から得られる．

例題 1.14: 複数の複素変数, $z_n = x_n + iy_n$ でのガウス積分は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz_1\, dz_1^* \cdots dz_n\, dz_n^* \,\exp(iz_j^* a_{jk} z_k + ib_j^* z_j + ib_j z_j^*)$$
$$= \frac{(2\pi)^n}{\det \mathbf{A}} \exp(i\mathbf{b}^\dagger \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}) \qquad (1.111)$$

となることをしめせ. ただし $\mathbf{A}$ は逆行列を持つエルミート行列である.

ガウス積分を扱ったこの章の結果は全て次のようにして得られるということを注意しておく. 積分した結果は同じ形の指数関数に比例する. その指数関数の引数は被積分関数を停留させる引数と等しい. つまり,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}x \,\exp\left[F(x)\right] \,\propto\, \exp\left[F(x_c)\right] \qquad (1.112)$$

である. ただし $F(x)$ はこの章で議論したいろいろな指数関数の中身で, $\mathcal{D}x$ は全てのガウス積分する変数についての積分を意味する. (1.112) に出てくる x_c は,

$$\left.\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right|_{x=x_c} = 0 \qquad (1.113)$$

で定義される. このテクニックは**鞍点法** (saddle-point method) と言われており, 以降でたびたび使われることとなる.

例題 1.15: この節で扱っているケースでは (1.112) は正しいことを確かめよ.

参考文献

[1] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York,1966.

[2] クーラン, ヒルベルト著 「数理物理学の方法」 東京図書.

[3] ディラック著 「量子力学」 (第４版) 岩波書店.

[4] ディラックのデルタ関数の数学的に厳密な定義, 超関数やテスト関数の一般的な記述は次の文献にある. I. Halperin, *Introduction to the Theory of Distributions*, University of Toronto Press, Toronto, 1952. 文献[2]も参照のこと.

[5] 汎関数の概念は, V. Volterraの研究に由来する. V. Volterra, *Opere Mathematiche, 5 vols.*, Accademia Nazionale dei Lincei, 1954-62. 文献[8]も参照のこと.

[6] 完全性, フーリエ級数やフーリエ積分の概念に関しては, E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, Oxford, 1948. を参照のこと.

[7] ヒルベルト空間については、たいていの汎関数解析のテキストに書いてある. たとえばうまく書かれているものに、M. Reed and B. Simon, *Method of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.

[8] 変分法の厳密な定式化については次の文献をみよ. M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 3 vols., Oxford University

Press, New York, 1972.

[9] この本で用いた場の理論に対する汎関数微分の定義はシュウィンガー，シマンチックの以下の論文に基づいている．J. Schwinger, Proc. Nat. Sci. Acad. **37**, 651 (1951); K. Symanzik, Z. Natürforschung **9A**, 10 (1954).

[10] 汎関数微分に関する様々な手法は以下の本で詳しく議論されている．H. Fried, *Functional Methods and Models in Quantum Field Theory*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.

[11] 汎関数と汎関数微分については以下で議論されている．L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley, New York, 1981.

[12] ラグランジュとハミルトンは変分原理を用いて古典力学を定式化した．これについての物理学者による標準的な説明は，ゴールドスタイン著「（新版） 古典力学」 吉岡書店，を参照せよ．

[13] 詳しくは，H. Greub, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1967 をみよ．

[14] ベーカー・キャンベル・ハウスドルフの定理の証明は，以下のテキストを参照のこと．J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[15] 複素解析についての詳しい説明は，例えば以下をみよ．R.V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1960.

第2章
量子力学の経路積分法

この章では,通常の非相対論的な量子力学を経路積分法を用いて再定式化することにする. 経路積分は非相対論的量子力学の基本的な構造からある極限操作を行って導きだされ, 様々な系で正しい結果を与える. この意味で, 経路積分は量子力学的振幅の表現として, 通常の波動力学や行列力学と同等である. 経路積分法の定義にはあいまいな部分がないのでこれは大変役にたつ. したがって, この経路積分の形は全ての量子過程に対する一般化の出発点になる.

2.1節では, 経路積分を定義するのに必要な量子力学の基礎を概観する. これを使って2.2節では, 量子力学の振幅を経路積分を使ってあらわす. 2.3節では, 2.2節の結果を一般化して,経路積分を "履歴総和" とみなすことができることをしめす. また,この一般化に際して生じるいくつかの数学的困難についても述べる.

2.1 量子力学

1.3節で議論した古典力学のハミルトン形式は, 演算子形式での量子力学を構成する出発点になる[1, 2, 3]. ハミルトン形式では一般化座標, q_j , と正準共役運動量, p_j , は粒子あるいは系の基本的な "観測可能量" だ. 量子力学では, これらの力学量は抽象的なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の演算子になる. このヒルベルト空間は, その系で観測される可能な全ての量子力学的配位をあらわ

す. 演算子, Q_j , P_j は次の交換関係を満たすと仮定する.

$$[Q_j, P_k] \equiv Q_jP_k - P_kQ_j = i\hbar\delta_{jk} . \tag{2.1}$$

ただし $\hbar$ はプランク定数である. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を構成する要素は**状態** (states) と呼ばれ, $|\psi\rangle$ と書かれる. 演算子 Q , P は,

$$Q_j\,|q\rangle = q_j\,|q\rangle \;\; , \;\; P_j\,|p\rangle = p_j\,|p\rangle \tag{2.2}$$

を満たす固有状態 $|q\rangle$, $|p\rangle$ からなる完全系を持つとする. ただし q_j , p_j は各々の演算子の固有値である.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上では内積が定義されている. $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ を $\mathcal{H}$ 上の任意の状態とすると, これらの状態の内積は $\langle\psi|\phi\rangle$ とあらわし, 次式に従う.

$$\langle\,\phi\,|\,\psi\,\rangle = \langle\,\psi\,|\,\phi\,\rangle^* . \tag{2.3}$$

この形は1.3節で出てきた関数の内積や1.4節で出てきたベクトルの内積と同じである. 状態 $|p\rangle$, $|q\rangle$ に対して次式がなりたつとする.

$$\langle\,q\,|\,q'\,\rangle = \delta^n(q-q')\,,\;\; \langle\,p\,|\,p'\,\rangle = \delta^n(p-p')\,. \tag{2.4}$$

これはすなわち, 状態が連続的な意味で正規直交系をなしているということをあらわしている. (2.4) のデルタ関数はテスト関数空間として L^2 , 言い換えると全ての 2 乗可積分な関数空間を持つ. さらに, これらの状態は完全であると仮定する. すなわち, 状態 $|p\rangle$, $|q\rangle$ は共にヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を張る. これは (2.4) の連続状態に対する規格化条件より,

$$\int d^np\,|\,p\,\rangle\langle\,p\,| = 1\,,\;\; \int d^nq\,|\,q\,\rangle\langle\,q\,| = 1 \tag{2.5}$$

を意味する. ただし (2.5) の積分範囲は, 系の位相空間全体である. (2.1) の代数関係と (2.4) の内積より, 運動量演算子の座標表示を得ることができる.

$$\langle\,q\,|P_j|\,q'\,\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}\delta^n(q-q')\,. \tag{2.6}$$

さらに, この結果より,

$$\langle q \,|\, p \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \cdot q\right) \tag{2.7}$$

であることがわかる. (2.7) の指数関数の前にかかっている因子は次式をみれば必要であることがわかる.

$$\begin{aligned} \langle q \,|\, q' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n p \, \langle q \,|\, p \rangle \langle p \,|\, q' \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} \, e^{ip\cdot(q-q')/\hbar} = \delta^n(q - q') \ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

(2.1) と (1.50) の形の類似性より二つの観測可能量 $A(p,q)$, $B(p,q)$ に対する古典論でのポアッソン括弧を次のようにして交換関係に置き換えれば量子力学へ移行できることがわかる.

$$\{A(p,q), B(p,q)\}_{p,q} \ \rightarrow \ \frac{1}{i\hbar}[A(P,Q), B(P,Q)] \ . \tag{2.9}$$

O を P , Q そして t の関数であるような量子力学的観測可能量であるとすると (1.49) で (2.9) の置き換えをして,

$$i\hbar \frac{dO}{dt} = i\hbar \frac{\partial O}{\partial t} + [O, H] \tag{2.10}$$

となる. ただし $H = H(P,Q,t)$ は考えている系のハミルトニアンである. ゆえに量子力学的観測可能量の時間発展は, 古典力学のときと同様に系のハミルトニアンによって決定される.

物理的な系はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の状態 $|\psi\rangle$ であらわされ, その状態は長さ 1, すなわち $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ を満たすとする. (2.10) より, 状態 $|\psi\rangle$ の時間発展は次のシュレディンガー方程式で与えられる.

$$H|\,\psi, t\,\rangle_S = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\,\psi, t\,\rangle_S \ . \tag{2.11}$$

波動力学で用いられる標準的な微分形のシュレディンガー方程式は, 位置の固有状態 $|q\rangle$ を (2.11) に作用させ, $\langle q|\psi, t\rangle_s$ を波動関数 $\psi(q,t)$ とすることに

よって得られる．この結果，

$$H(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, q)\,\psi(q,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(q,t) \tag{2.12}$$

を得る．系が $|\psi\rangle$ という状態にあるとき，観測可能量 $O(P,Q)$ の期待値は，

$$\langle O\rangle = \langle\psi\,|\,O(P,Q)\,|\,\psi\rangle = \int dq\,\psi^*(q,t)\,O(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\,,q)\,\psi(q,t) \tag{2.13}$$

で与えられる．これより $|\psi(q)|^2$ は確率密度と解釈できる．状態の規格化の式，

$$\langle\psi\,|\,\psi\rangle = \int dq\,|\psi(q,t)\,|^2 = 1 \tag{2.14}$$

は，単に粒子を観測する確率の全空間での和は1になることをしめしているにすぎない．

量子力学のシュレディンガー流の見方では，状態 $|\psi\rangle_s$ はあらわに時間に依存しており，観測可能量には時間依存性がない．よって，もし H に時間依存性がなければ時刻 t での状態は $t=0$ の状態から次の時間発展で与えられる．

$$|\,\psi,t\,\rangle_S = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)|\,\psi\,\rangle_S\,. \tag{2.15}$$

もし H に時間依存性があるならば(2.15)は，H の時間順序積分で置き換えなければならない．これを，

$$|\,\psi,t\,\rangle_S = T\left\{\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau\,H(\tau)\right]\right\}|\,\psi\,\rangle_S \tag{2.16}$$

と書く．時間順序をとるという作業は次のことを意味する．すなわち(2.16)の指数部分の演算子を展開し，時間が一番後のものを左に，はじめのものを右になるように時間の順序に並べるということである．これは，以下の定義に従う階段関数 $\theta(\tau)$ を導入すると最も簡単に表現できる．

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0\ \text{のとき} \\ 0 & \tau < 0\ \text{のとき} \end{cases} \tag{2.17}$$

例題 2.1: 階段関数を積分表示すると,

$$\theta(\tau) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega - i\epsilon} \tag{2.18}$$

となることおよび,

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = \delta(t) \tag{2.19}$$

がなりたつことをしめせ.

階段関数を使うと, 二つの時間に依存する演算子の時間順序積は,

$$T\{A(t_1)B(t_2)\} = \theta(t_1 - t_2)A(t_1)B(t_2) + \theta(t_2 - t_1)B(t_2)A(t_1) \tag{2.20}$$

と書ける. より多くの演算子の時間順序積も (2.20) を一般化すれば簡単に得ることができる.

ハイゼンベルク表示では観測可能量 O_H は, 時間に依存する. よって (2.10) より,

$$i\hbar \frac{d}{dt} O_H(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O_H(t) + [O_H(t), H] \tag{2.21}$$

がなりたつ. それぞれの表示での行列要素は等しいので,

$$_H\langle\psi|\, O_H(t)\, |\phi\rangle_H = {}_S\langle\psi, t|\, O_S\, |\phi, t\rangle_S \tag{2.22}$$

がなりたつ. もし $O_H(t)$ があらわに時間に依存しないなら,

$$i\hbar \frac{\partial O_H}{\partial t} = [O_H(t), H] \tag{2.23}$$

となる. 時刻 t における (2.23) のハイゼンベルク表示での演算子は, $t = 0$ での演算子 O_H を使って以下のように書ける.

$$O_H(t) = e^{iHt/\hbar} O_H e^{-iHt/\hbar} \,. \tag{2.24}$$

もし H があらわに時間依存するなら, (2.16) のように時間順序を使わなくてはならない. ハイゼンベルク表示での状態 $|\,\psi\,\rangle_H$ は時間に依存しない. 明らか

にシュレディンガー表示とハイゼンベルク表示は, ある時刻で等しく選ぶことができる(つまり $O_H = O_S$). 以下ではこの時刻を $t = 0$ と選ぶ. 時間依存性をあらわに書いていない状態は, ハイゼンベルク表示の状態ともシュレディンガー表示の $t = 0$ での状態ともとれる.

量子力学の経路積分形式では, 我々がもっとも興味のあるのは遷移振幅だ. 時刻 t_a でシュレディンガー表示で $|\,\phi, -t_a\,\rangle$ の状態にある系から, 時刻 t_b で $|\,\psi, -t_b\,\rangle$ の状態への遷移振幅を, 次のように定義する.

$$Z(\psi, \phi) = \langle\, \psi, -t_b \,|\, \phi, -t_a \,\rangle \,. \tag{2.25}$$

この遷移振幅から二つの状態間の遷移確率は, $P = |Z|^2$ となる. すなわち Z は**量子過程** (quantum process) の遷移振幅をあらわす. 次の節では, 経路積分表示を用いて遷移振幅を与えることにする.

2.2 経路積分の導出

この節では, 前節の結果を使って, 遷移振幅の経路積分表示を与える. 主要なアイデアは, はじめディラックによって指摘された [4]. そのアイデアとは, 無限小の量子力学的遷移振幅は古典的作用によって決まる, というものである. 比較的直感的な議論を使って, ファインマンはこのアイデアを有限の遷移振幅の経路積分表示にまで発展させた [5, 6]. これはファインマンとヒッブスの著書に詳しく書かれている [7]. この節で導く経路積分法は, 形の上ではファインマンがはじめに開発した方法と同じだ. しかしながら, 量子力学の正準形式に基づく経路積分法の導出には, それが通常の波動力学や行列形式での量子力学の方法から得られる結果と一致することが自明であるという利点がある. よって, こうした導出は経路積分形式を厳密なやり方で導出することが不可能な系に一般化する際に, 発見法的に非常に役にたつ.

ゆえに, 経路積分法を導出する際に設けた仮定をはっきりさせておくことが大変重要である. 経路積分法を一般化するときには, この仮定に常に気を

つけなければならない. 第一の仮定は, 完全性をあらわす (2.5) 式の積分範囲を $\pm\infty$ とすることである. 第二の仮定は, ハミルトンアン H があらわに時間に依存しないということだ. しかし, この仮定は必ずしも必要というわけではない. 三番目の仮定（これは単に表記を簡単にするためだが）は, あるポテンシャルの下で一次元運動する 1 粒子系を考えることにするというものだ.

経路積分法を導出するために, まずはじめにハイゼンベルク表示での演算子 $Q(t)$, $P(t)$ の "瞬間的" (instantaneous) な固有状態 $|q,t\rangle$, $|p,t\rangle$ を構成する [3, 8, 9]. それらを次のように定義する.

$$|\, q,t\,\rangle = e^{iHt/\hbar}|\, q\,\rangle\,,\ \ |\, p,t\,\rangle = e^{iHt/\hbar}|\, p\,\rangle\,. \tag{2.26}$$

これらの状態はシュレディンガー表示の状態では**ない**ということを注意しておく. しかしながら, これらの状態は完全である. なぜなら (2.5) より,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} dq\,|\, q,t\,\rangle\langle\, q,t\,| \\ &= \exp(iHt/\hbar)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dq\,|\, q\,\rangle\langle\, q\,|\right)\exp(-iHt/\hbar) = 1\end{aligned} \tag{2.27}$$

がなりたつからである. 状態 $|q,t\rangle$ は, 次のようにハイゼンベルク表示の演算子 $Q(t)$ の固有状態である.

$$Q(t)\,|\, q,t\,\rangle = q\,|\, q,t\,\rangle\,. \tag{2.28}$$

この状態はまた, シュレディンガー表示の状態 $|\psi,t\rangle$ に対して,

$$\langle\, q,-t\,|\,\psi,t\,\rangle = \langle\, q\,|\,\psi\,\rangle = \psi(q) \tag{2.29}$$

という性質を持つ. 同様の関係式が, 瞬間的な運動量固有状態に対してもなりたつ.

これらは, シュレディンガー表示での状態間の遷移要素を経路積分形式で求めるときに使うことができる. 次のような異なる時刻での瞬間的な固有状態の内積 Z を考えよう. すなわち,

$$Z(q_a,t_a,q_b,t_b) = \langle\, q_b,t_b\,|\, q_a,t_a\,\rangle\,. \tag{2.30}$$

ただし, $t_b > t_a$ である. この Z がわかると(2.25)のより一般的な形を計算できる. つまりシュレディンガー表示の状態間の遷移要素は, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\langle \psi, -t_b \,|\, \phi, -t_a \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a\, dq_b \,\langle \psi, -t_b \,|\, q_b, t_b \rangle \langle q_b, t_b \,|\, q_a, t_a \rangle \langle q_a, t_a \,|\, \phi, -t_a \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a\, dq_b\, \psi^*(q_b)\phi(q_a) Z(q_a, t_a, q_b, t_b)\,. \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

ただし, (2.27) と (2.29) を使った. 系の始状態と終状態がそれぞれ規格化された $\psi(q)$, $\phi(q)$ で与えられると, 系は ψ から ϕ まで関数 Z によって時間発展する. このため, 遷移要素(2.30)は**プロパゲーター**(propagator) と呼ばれることがある. このプロパゲーターは, 系の時間発展に関する情報を全て担っているのである.

はじめに, 時間間隔 $t_b - t_a$ を無限小に N 等分して, 時間間隔が $\epsilon = (t_b - t_a)/N$ となるようにする. ただし, 最後に $N \to \infty$ の極限をとるものとする. 次に, 遷移要素に $N-1$ 個の中間の瞬間的な固有状態 $|q\rangle$ を挿入する. それぞれの固有状態の時刻は $t_n = t_a + n\epsilon$ とする. これにより,

$$
\begin{aligned}
Z(q_a, t_a, q_b, t_b) \;=\; & \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots dq_{N-1} \,\langle q_b, t_b \,|\, q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \\
& \times \langle q_{N-1}, t_{N-1} \,|\cdots\, |q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 \,|\, q_a, t_a \rangle \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

を得る. これで, 全遷移要素は N 個の遷移要素の積に還元できた. そしてそれぞれの遷移要素は時間の間隔がゼロに近づくという意味で無限小であると言える. よって, それらのうちの一つを解析しさえすればよい. 二つの状態間の時間差は ϵ なので, (2.26)の定義より j 番目の要素は,

$$
\langle q_{j+1}, t_{j+1} \,|\, q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} \,|\, e^{-i\epsilon H(P,Q)/\hbar} \,|\, q_j \rangle \qquad (2.33)
$$

で与えられる.

さらに進むためには, 全ての無限小要素を矛盾なく扱う規約を選ばなくてはならない. またハミルトニアンが指数関数になっている演算子の行列要素

を得るために, 指数関数を巾級数に展開しなければならない. 展開した後, 演算子 P を全て左へ, 演算子 Q を右へと動かす. このような演算子の並べ方を**座標順序** (coordinate ordering) と呼ぶことにしよう. この座標順序を実行した結果, 最終的に P と Q の積は全ての P 演算子は左側に Q 演算子は右に移っている. この座標順序を $C\{\cdots\}$ と書くことにする. 例えば,

$$C\{PQP^2\} = P^3Q \tag{2.34}$$

となる.

明らかに, まったく逆の規約をとることもできる. 演算子をならべる順序がいろいろあるということから, 経路積分にあいまいな点があると考えるのは当然である [10]. 逆の規約をとったときでも同じ結果が得られることを例題 2.4 とする. 座標順序の優れている点は, Q と P の任意の関数 $f(Q,P)$ が以下の行列要素を持つことにある.

$$\langle\, p \,|\, C\{\, f(Q,P)\,\}\,|\, q\,\rangle = f(q,p)\,\langle\, p\,|\, q\,\rangle\;. \tag{2.35}$$

したがって, 座標順序された演算子の関数は, 行列要素をとると c 数 (classical number) の関数に置き換えることができる. (2.35) は c 数の関数 f の巾級数表現を使ってしめすことができる. その際に, 座標順序によって演算子 Q と P の交換関係からくる項が出てこないことを注意しておく.

(2.33) を評価する次のステップには, 以下の関係式を使えばよい.

$$e^{-i\epsilon H(P,Q)/\hbar} = C\left\{\, e^{-i\epsilon H(P,Q)/\hbar}\,\right\} + O(\epsilon^2)\;. \tag{2.36}$$

一般のハミルトニアンに対するこの式の証明は例題 2.2 にある. しかしながら, ここで物理的には意味はないが, 大変簡単な形をしたハミルトニアン $H = aP + bQ$ に対して (2.36) をしめすことには意味がある. なぜなら, その際にベーカー・キャンベル・ハウスドルフの定理を使うからである. ベーカー・キャンベル・ハウスドルフの定理を演算子に拡張したものは, 1.4 節のように行列で書いたものと同じ形をしている. この定理より,

$$e^{-i\epsilon(aP+bQ)/\hbar} = e^{-i\epsilon aP/\hbar}e^{-i\epsilon bQ/\hbar}e^{i\epsilon^2 ab/2\hbar}\;. \tag{2.37}$$

を得る．よって(2.1)の交換関係からくる項は $O(\epsilon^2)$ で，これは$\epsilon \to 0$ で無視できることがわかる．交換関係は量子効果あるいは**量子補正** (quantum correction)をあらわすので，これは無限小の時間間隔では系の時間発展はほとんど古典的であるという直感的な考えに一致する．(2.36)の $O(\epsilon^2)$ の項が無視できるというこの結果を一般化するにはトロッター(Trotter)積の公式[11, 12]を使うとよい．もし A と B が二つの有界な演算子とすると，トロッター積の公式とは次のものを言う．

$$\exp[t(A+B)] = \lim_{n\to\infty}\left[\exp\left(\frac{t}{n}A\right)\exp\left(\frac{t}{n}B\right)\right]^n . \tag{2.38}$$

> **例題2.2**: (2.38)を証明し，この定理を使って $\epsilon \to 0$ の極限で$H = P^2/2m + V(Q)$ という形のハミルトニアンからくる交換子が(2.33)を得る際に寄与しないことをしめせ．

これらの結果より無限小遷移要素(2.33)は，$\epsilon \approx 0$ で，

$$\begin{aligned}
&\langle\, q_{j+1}\,| e^{-i\epsilon H(P,Q)/\hbar} |\, q_j\,\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j\, \langle\, q_{j+1}\,|\, p_j\,\rangle\langle\, p_j\,|\, e^{-i\epsilon H(P,Q)/\hbar}\,|\, q_j\,\rangle \\
&\approx \int_{-\infty}^{\infty} dp_j\, e^{-i\epsilon H(p_j,q_j)/\hbar}\langle\, q_{j+1}\,|\, p_j\,\rangle\langle\, p_j\,|\, q_j\,\rangle
\end{aligned} \tag{2.39}$$

となる．この無限小要素は(2.7)を使って次のように簡単にあらわすことができる．

$$\langle\, q_{j+1}\,|\, p_j\,\rangle\langle\, p_j\,|\, q_j\,\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)/\hbar} . \tag{2.40}$$

q_j は時刻 t_j の状態の座標変数であるから，**形式的**に次のように置き換えることができる．

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(q_{j+1}-q_j) = \frac{dq_j}{dt} \equiv \dot{q}_j . \tag{2.41}$$

この恒等式より，無限小の行列要素は，

$$\langle\, q_{j+1}, t_{j+1}\,|\, q_j, t_j\,\rangle \quad\approx\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\left[p_j\dot{q}_j - H(p_j,q_j)\right]\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\epsilon\,\mathcal{L}(p_j, q_j)\right] \tag{2.42}$$

と書くことができる. ただし,

$$\mathcal{L}(p_j, q_j) = p_j \dot{q}_j - H(p_j, q_j) \tag{2.43}$$

である. 1.3節で議論したように $\mathcal{L}(p_j, q_j)$ は古典力学系のハミルトン形式でのラグランジアン密度だ.

有限遷移要素 Z は N 個の無限小要素の積で書くことができる.

$$\langle\, q_b, t_b \,|\, q_a, t_a \,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\, dq_1 \cdots dq_{N-1} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1} \epsilon\,\mathcal{L}(p_j, q_j)\right] . \tag{2.44}$$

ただし, (2.44) で $q_0 = q_a$, $q_N = q_b$ としている. この式の中に出てくる指数関数の引数はリーマン和の形をしている. したがって次のように書ける.

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon\,\mathcal{L}(p_j, q_j) = \int_{t_a}^{t_b} dt\,\mathcal{L}(p, q) = S\left[\,p(t), q(t), t_a, t_b\right] . \tag{2.45}$$

したがって, 古典的作用が量子力学の遷移要素に登場するのである. (2.44) に出てきた**経路積分の測度** (path integral measure) は, 形式的に次のように書ける.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\, dq_1 \cdots dq_{N-1} \equiv \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q . \tag{2.46}$$

(2.46) と作用の指数の積は確率測度の数学的要件を満たさない. けれども, 以下ではそれらを経路積分の測度として扱う. この測度の問題は2.3節でさらに詳しく議論する.

遷移要素の最終的な形は,

$$\langle\, q_b, t_b \,|\, q_a, t_a \,\rangle = \int_{q_a}^{q_b} \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\,\mathcal{L}(p, q)\right\} \tag{2.47}$$

となる. ただし, q 積分の積分範囲は, q_0 と q_N が q_a と q_b に等しいことを忘れないように上のように書いた. (2.47) はプロパゲーターを経路積分で書い

たときの基本的な表現である. (2.47) の測度は q_a から q_b まで粒子が進むときの可能な全ての**位相空間** (phase space) を覆う.

例題 2.3: ラグランジアン密度が, 時間に依存する c 数関数であらわされる系を考える (ただし, ポテンシャルは速度依存性を**もたない**). この系の時間にあらわに依存するハミルトニアンを考える. このときでも, 遷移要素の経路積分表示の形は変わらないことを (2.16) を使ってしめせ.

例題 (2.3) は系のラグランジアン密度が時間に依存する変数を含むようなときでも, 経路積分表示はまったく変わらないという重要な結果を与える.

例題 2.4: P 演算子を右に Q 演算子を左に移動させる座標順序の場合の経路積分の形を求めよ.

例題 2.5: 経路積分形式を n 自由度の系に拡張せよ.

いくつかの文献中では, 測度に $\mathcal{D}p$ があらわれない経路積分を使っている場合があるが, これは必ずしも間違っているとは言えない. なぜなら, 多くのラグランジアンで (2.42) の p_j 積分は実行できるからである. この例として, 系のラグランジアン密度が次で与えられる場合を考える.

$$\mathcal{L}(p,q) = p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} - V(q)\ . \tag{2.48}$$

これは p に関してはガウス積分ができるので, (2.42) の全ての無限小遷移要素の p 積分は正確に得ることができる. (1.107) より,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\frac{i}{\hbar}\left[p_j(q_{j+1}-q_j) - \epsilon\frac{p_j^2}{2m} - \epsilon V(q_j)\right] \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}} \exp\frac{i}{\hbar}\epsilon\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{q_{j+1}-q_j}{\epsilon}\right)^2 - V(q_j)\right] \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\epsilon\,\mathcal{L}(\dot{q},q)\right]
\end{aligned} \tag{2.49}$$

を得る. ただし, (2.41) を再び使った. このような場合では, 経路積分は,

$$\langle\, q_b, t_b \,|\, q_a, t_a \,\rangle = \int_{q_a}^{q_b} \overline{\mathcal{D}}q \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(\dot{q}, q) \right\} \tag{2.50}$$

のようになる. ただし,

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(q) \ . \tag{2.51}$$

dp 積分の結果出てくる係数は測度の中に吸収できて, 次のように定義する.

$$\overline{\mathcal{D}}q \equiv \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{N/2} dq_1 \cdots dq_{N-1} \ . \tag{2.52}$$

古典力学の作用 (1.38) の形は, この例で考えた作用にあてはまる. (2.47) の方がより一般的で役に立つが, 次の節では (2.50) を用いて経路積分を一般化する.

(2.50) の経路積分の形はラグランジアン密度中のポテンシャル $V(q)$ が速度に依存しないという場合に導き出された. ある種の物理系は速度依存性のあるポテンシャルによって表される. そのときでも, プロパゲーターの経路積分表示を導くことはできる. しかし, 最終的な形は一意的に定まらない場合がある. このことを次の例題でみる.

例題 2.6: 質点が, 以下の速度に依存するポテンシャル中にある一次元系を考える.

$$V(\dot{q}, q) = \tfrac{1}{2}\alpha\dot{q}^2 q^2 \ .$$

(2.50) と同様の経路積分形式を求めよ. そしてその結果に含まれる座標順序の問題からくる不定性について議論せよ.

2.3 履歴総和

前節では遷移振幅の経路積分表示を標準的な量子力学の演算子形式から導いた. 二番目の表現 (2.50) の中の積分の測度は $\epsilon \to 0$ の極限で発散するにも

かかわらず, 前節で定義した経路積分は他の正しい方法で得られた答えと同じ答えを出さなくてはならない. 実際にそうなっていることは, 次の章で詳しくみる. しかしながら, しばらくの間, 経路積分を実際に計算することは置いておいて, 経路積分に含まれ, またそれが示唆している概念を一般化することに焦点をしぼる. この一般化はいまのところ厳密なものではない. このことは新しい問題に経路積分を適用する際に忘れてはならない. また, 経路積分の概念を一般化する際には, 前節で経路積分を導くときに立てた仮定をもう一度思い出さなければならない.

経路積分の持つ際立った特徴に, 量子力学をあらわすのに系の古典的作用が出てくることがある. 経路積分形式を拡張するときに主な役割を演ずるのはまさにこの特徴である. 運動量 p_j について積分して得られた(2.50)は経路積分の概念を一般化する原点になる形である. まずはじめに q_j 積分を次の形のリーマン和に置き換える.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_j \;\rightarrow\; \sum_{n_j=-\infty}^{\infty} \epsilon_q \,. \tag{2.53}$$

ただし, ϵ_q は q_j 積分の無限小測度の要素である. これを使うと(2.50)の経路積分は次のようになる.

$$\begin{aligned} \langle\, q_b, t_b \,|\, q_a, t_a \,\rangle \quad \rightarrow \quad & \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N/2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \epsilon_q \cdots \sum_{n_{N-1}=-\infty}^{\infty} \epsilon_q \\ & \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1} \epsilon\,\mathcal{L}\left([n_{j+1}-n_j]\frac{\epsilon_q}{\epsilon}, n_j\epsilon_q\right)\right] \end{aligned} \tag{2.54}$$

ただし, n_0 と n_N は, $q_a = n_0\epsilon_q$, $q_b = n_N\epsilon_q$ と定義した.

経路積分をこのようにして書くと, これは $N-1$ 個の整数変数の組 $\{n_j\}$ のとりうる全ての可能な値に対する和の形をしていることがわかる. 各々の変数の値の組に対して, その値によって決まる作用の指数関数の重みがかかっている. $\{n_j\}$ の集合を定めることは $\{q_j\}$ の集合を定めることと等しい. そして, この集合 q_j は q_a から q_b へ運動する間の粒子の位置を表している. 実

際, $\{n_j\}$ の値の集合を決めるということは, q_a から q_b までの**とびとびの経路** (discrete path) を一つ決めることになる. すなわち, これは $N-1$ 個の粒子の中間の位置を定めたことになる. $\epsilon_q \to 0$ とすれば, q_a から q_b への区分的に連続な全ての経路をこの方法であらわすことができる. ゆえに, この極限で経路積分は時間 $t_b - t_a$ の間に q_a から q_b まで到達する区分的に連続な全ての経路の和とみなすことができる. その和をとる際には, 各々の経路に対してその経路の持つ**古典的**作用の指数関数だけの重みがかけられる. このようにして, 区分的に連続な経路が粒子の運動の可能な"歴史"を表し, 遷移要素の経路積分表示は全ての可能な歴史に重みをかけて和をとったものになっているのである.

この結果は経路積分を他の量子化の方法ではうまく理解できない系に一般化する際の出発点になる. この方法で量子過程をあらわすには, まずはじめに考えている系の古典的作用 S を書き下す. そのために系の力学変数, 例えば量子力学の場合 $q(t)$ を特定する. **量子化**された系の遷移振幅 Z は, 次で与えられる.

$$Z = \sum_{\text{paths}} e^{iS/\hbar} \ . \tag{2.55}$$

ただし, 経路は力学変数のあるはじめの配位から最後の配位までを結ぶものをとることにする. (2.55) では, 形式的な微分 (2.41) は正確なものとして取り扱う. この意味で, (2.55) は前節で導いた経路積分の**連続**版と言える. 量子過程に対するこの描像の利点は, 何をしているか直感的によくわかることにある. 経路積分表示では量子系にニュートンの運動方程式に従う古典的な経路が出てくる. これは, 量子過程を視覚的にみる助けになる. しかし, 一見簡単にみえる (2.55) には微妙でまだ解かれていない数学的に難しい問題が多く含まれている. これらの問題を大雑把にでも議論しなければならない.

まず第一に、量子化のはっきり分からないような古典系がたくさんある. 一次元量子力学系のような簡単な系でも, このような例はたやすくみつけることができる. 簡単な例として, ポテンシャル $V = \alpha q^2 - \beta q^4$ を持つ系を考

える. β が正定数ならば, ポテンシャルは底がない. このようなポテンシャルでも, 少なくとも形式的には運動方程式の解を得ることができるが, 規格化可能な基底状態が存在しないので, 量子論は安定でない. 古典系から量子系へ移行するときのもう一つの問題は, 一見すると古典的な拘束をどのようにして矛盾なく量子力学的に扱うかが明らかではないことである. またそれより微妙な問題として, ある種の量子論では保存則がアノマリーで破れているために矛盾なく量子化できないということがある. 経路積分の方法は, このような状況を改善できないし, よく考えずにこの方法をあてはめると, その問題の幾つかはむしろ不明確になってしまうだろう.

二番目に, (2.54) 式をみると, 各々の経路にかけられる唯一の異なった重みは各経路から決定される作用の指数のみであり, 全ての経路に対してかかる係数, 例えば (2.54) の ϵ はどの経路に対しても共通であることがわかる. このことが, 全ての量子系でなりたつか, これがむしろ (2.50) を導く際に立てた人為的な仮定であるかは明らかではない. 例えば, 中間状態の q_j 積分の積分範囲を $\pm\infty$ と仮定したが, その代わりに, いま考えている系が長さ L の一次元の箱に入っている粒子とすると, 明らかに q_j 積分の範囲は 0 から L までとなる. これだけでも (2.47) と異なった結果が得られる. (2.50) に似た形の結果を得るにはさらに困難が生じる. この節の後半で, この例に似た円周上に乗っている粒子の系を調べて, これらの問題点を明らかにする. その際には量子力学の解から導かれた経路積分と古典的な作用との関係は明白ではないだろう.

三番目に, q_a から q_b への "たくさんの" 経路があると言ったが, これは大変控え目な意味である. というのも経路積分に寄与しない多くの病的な経路がある. 例えば, もし t_a が有理数で t_b が有理数でないとすると, 次のディリクレ関数であらわされる経路を考えることができる.

$$q(t) = \begin{cases} q_a & t\text{ が有理数のとき} \\ q_b & t\text{ が無理数のとき} \end{cases} \tag{2.56}$$

このような経路は区分的に連続でなく, この基準により経路積分から除外で

きる. さらに, 区分的に連続な経路には, 全体として不連続であったり微分可能でない経路があるが, これらは作用を停留させるような大変なめらかで完全に連続な軌跡からはある意味で“かけはなれている”のである. 直感的には古典的経路からかけ離れた経路は経路積分にほとんど寄与しないと考えられる. というのも古典的振舞いから大きく外れた経路が寄与すると, 多くの物理的な過程で量子補正は小さいという事実に反するからである. もちろん, 量子力学は不連続な束縛状態を持っていることから, この直感には反している. 古典的には, 引力ポテンシャルに対して連続的な束縛状態が可能であるので, 系のこのような量子的振舞いは古典的な振舞いからかけ離れている. 経路積分では, 履歴総和によってどのようにして束縛状態があらわれるか明確でない. というのも量子的な束縛状態は古典的には離散的な束縛された軌跡から生じるからである.

作用が大きな値を持つ経路が経路積分に重要な寄与をしないのはリーマン・ルベーグの定理 (Riemann-Lebesgue lemma) からわかる [14]. この定理は, もし $f(\alpha)$ が積分可能な関数とすると,

$$\lim_{t\to\infty}\int d\alpha\, f(\alpha)\sin(\alpha t) = 0 \tag{2.57}$$

がなりたつというものである. リーマン・ルベーグの定理は, $\lim_{t\to\infty}\sin(\alpha t)$ を超関数として扱って証明することができる.

$$\lim_{t\to\infty}\sin(\alpha t) = \int_0^\infty dt\,\frac{d}{dt}\sin(\alpha t) = \tfrac{1}{2}\alpha\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\alpha t} = \pi\alpha\,\delta(\alpha) \tag{2.58}$$

これより, (2.57) がしめされる.

例題 2.7: $\lim_{t\to\infty}\cos(\alpha t) = 0$ をしめせ.

これらの結果より, 超関数としては,

$$\lim_{t\to\infty} e^{i\alpha t} = \pi i\alpha\,\delta(\alpha) \tag{2.59}$$

という関係がなりたち，よい振舞いをする関数にかけて積分すると消えることがわかる．この意味で作用が無限大になるような経路は経路積分に寄与しない．

これらのことから経路積分を履歴総和として一般化する際の主な困難は，どのようにしてうまく和をとるか，あるいは和を定義できるのかというようなところにある．全ての経路を数学的に厳密に足しあわせたり積分するには，全ての経路の空間上の**測度** (path measure) を形式的に定義しなければならない [15, 16]．この測度は，作用の指数関数であらわされる重みの関数と矛盾しないように定義しなければならない．なぜなら，この作用は積分される汎関数であるからだ．易しい例で実際にこれをみてみる．指数関数の肩のリーマン和にでてきた dt は，$t_{j+1}-t_j$ の形を持つジョルダン測度と呼ばれるものの例になっている．これは実軸上に話を限定しても，もっとも一般的な測度というわけではない．積分される汎関数とそれを積分する際に使われる測度とが関係していることをしめすためには，(2.56) で定義される関数 $q(t)$ がジョルダン測度を使ったときに積分可能でないことをしめせばよい．もしこのような病的な関数を積分可能にしようとするなら，もっと一般的な測度である**ルベーグ測度** (Lebesgue measure) を定義しなければならない．厳密な測度理論の議論，特に経路の空間での測度をどのように定義するかという問題は非常に難しく，この本の範囲を越えた数学的な知識を必要とする [17]．しかしながら，経路を足しあわせることについて少し考えればよりはっきりわかることもある．

経路積分を連続化したものに対して測度を厳密に構成するときにもっとも困難になることは，その定義に i が入っていることである．このとき指数関数は振動するので，“厄介な” 経路，例えば微分可能でない経路や不連続な経路を含む場合困難に陥る．なぜなら，作用の指数関数は超関数になるからである．しかし，単純にこのような厄介な経路を除外すると困難が生じる．なぜなら、微分可能で連続な経路は全ての経路の集合のいたる所で**密**であるが，それらだけをとると経路積分を正しく評価するには不十分であることをしめすこと

ができるからだ. 実際, 詳しく解析すると, これらの経路だけでは測度がゼロであることがわかる[18]. これは実軸上で全ての有理数の集合は測度がゼロなのにもかかわらず実軸のあらゆる場所で密である状況によく似ている.

残念ながら, 作用の指数関数は超関数になったりするので, (2.55)で定義される経路積分ではよい振舞いをする測度を定義できない. ゆえに数学的にきちんと定義するなら, 別のやり方を考えなくてはならない. 超関数が出てくる原因は, 経路積分が振動することにある. この振動を抑えることができるならば, 経路に対してよりうまく測度を定義できる可能性がある. この期待から, ユークリッド時間で定義した経路積分に関する厳密な研究がたくさんなされてきた. この定義では, 作用の被積分関数にいわゆるウィック回転(Wick rotation)という t を $-i\tau$ に置き換える手法が使われる. 実際には, 経路積分は虚時間に解析接続され, そこで値が計算され, そして逆ウィック回転, $\tau \to it$ をして最終結果にいたるのである. 1.5節で一般化した振動するガウス積分を計算する際に解析接続が必要とされた. そこでは, 積分はウィック回転と同様の解析接続によって実行された. ウィック回転すると, (2.50)の経路積分は次のようになる.

$$Z = \int_{q_a}^{q_b} \overline{\mathcal{D}}q\, e^{-S_E/\hbar} \ . \tag{2.60}$$

ユークリッド作用(Euclidean action) S_E は, (2.48)のような簡単な例では次式で与えられる.

$$S_E = \int_{t_a}^{t_b} d\tau \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right\} \ . \tag{2.61}$$

経路積分の中の測度の係数はウィック回転の下で実数となり,

$$\overline{\mathcal{D}}q = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\epsilon_\tau} \right)^{N/2} dq_1 \cdots dq_{N-1} \tag{2.62}$$

となる. ただし ϵ_τ は実際は $d\tau$ である. ユークリッド作用(2.61)は p の代わりに $\dot{q}$ で書いたハミルトニアンを積分したものと同じ形をしている. これが偶然の一致でないことは4章でしめす. また, ポテンシャルに底がないならば, 先程の厄介な経路と同様の古典的経路からのずれが大きい経路は経路積分に

指数関数的に小さい寄与しかしないということも重要だ．このように，ウィック回転によって数学的に意味のある測度を得ることが可能になる．

ウィック回転の下で，$V=0$ のときのシュレディンガー方程式は次のようになることを注意しておく．

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = \hbar\frac{d}{d\tau}\psi\,. \tag{2.63}$$

これはブラウン運動 (Brownian motion) する粒子の拡散方程式の形をしている．ウィーナー (Wiener)[19] は，ブラウン運動に対する経路積分表示をはじめて構成し，よい振舞いをする測度を定義できることをしめした．彼は，洗練されたテクニックを使ってユークリッド領域で経路積分がよく定義された測度を持つことをしめした．この議論はこの本の後半にゆずる．興味のある読者にはライバース (Rivers) のテキスト [13] やグリム (Glimm)，ジャッフェ(Jaffe) らのテキスト [20] を推薦する．

これまでの議論は連続的な経路に対する経路積分 (2.55) を数学的によく定義された対象として扱う上での困難を述べている．実際的には，経路の和は通常，連続かつ微分可能で，有限の作用を与える区分的に連続な経路の集合を使って近似される．特に，古典的な経路はもっとも大きな重みを持った経路であると信じられている．多くの場合，実際に証明されているわけではないが，この近似により量子的な遷移振幅の重要な特徴が得られると考えられている．3章で量子的な遷移振幅に対する古典的経路の役割について，いくつかの大変簡単な例を用いて議論する．

この章の終わりとして簡単な1次元量子系で今まで考えたものと大分異なる性質を持った系の遷移振幅の経路積分表示を導びこう．半径 R の円周上に束縛された質点を考える．この系の古典的作用は角変数 θ を用いてあらわすと次のようになる．

$$\mathcal{L}(\dot{\theta},\theta) = \tfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - V(\theta)\,. \tag{2.64}$$

ポテンシャル V は周期的と仮定する．つまり任意の整数 n について，$V(\theta+2\pi n)$

$= V(\theta)$ である．ハミルトニアンは次のような標準的な形をしている．

$$H(p_\theta, \theta) = \frac{1}{2m}{p_\theta}^2 + V(\theta) \ . \tag{2.65}$$

この系の位置の固有状態は $|\theta\rangle$ であり，以下の意味で完全である．

$$\int_0^{2\pi} d\theta \,|\, \theta \,\rangle\langle\, \theta \,| = 1 \ . \tag{2.66}$$

運動量演算子の配位空間表示は，

$$\langle\, \theta \,|\, P \,|\, \theta' \,\rangle = -i\frac{\hbar}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\delta(\theta - \theta') \tag{2.67}$$

となる．

系は円周上に乗っているので，全ての観測可能量の固有関数は周期的でなければならない．観測可能量 p_θ の固有状態はもはや連続でなく，整数 n によって区別されるが，その固有関数を $|p_n\rangle$ と書く．(2.67) より，規格化された運動量固有関数は，

$$\langle\, \theta \,|\, p_n \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} \tag{2.68}$$

となる．これらの固有関数は直交する．

$$\langle\, p_n \,|\, p_m \,\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta} = \delta_{mn} \ . \tag{2.69}$$

そして，次の意味で完全である．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle\, \theta \,|\, p_n \,\rangle\langle\, p_n \,|\, \theta' \,\rangle = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta-\theta')} = \delta(\theta - \theta') \ . \tag{2.70}$$

デルタ関数は明らかに周期的である．遷移要素 $\langle\, \theta_b, t_b \,|\, \theta_a, t_a \,\rangle$ の経路積分形式はこれらの結果を使ってあらわすことができる．

例題2.8: 上の結果を用いて遷移振幅の経路積分表示が次のようにあらわされることをしめせ.

$$\langle\,\theta_b, t_b\,|\,\theta_a, t_a\,\rangle =$$
$$\lim_{N\to\infty}\int_{\theta_a}^{\theta_b} d\theta_1\cdots d\theta_{N-1}\,\frac{1}{(2\pi)^N}\sum_{n_0=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_{N-1}=-\infty}^{\infty}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\left[n_j\hbar(\theta_{j+1}-\theta_j)-\epsilon\frac{n_j^2\hbar^2}{2mR^2}-\epsilon V(\theta_j)\right]\right\}. \quad (2.71)$$

ただし, θ_j 積分は0から 2π までである.

古典的運動量を $p = n\hbar/R$ とおけば(2.71)は一般的な形(2.47)に形式的に一致する. しかしながら, こうすると古典的運動量が不連続になってしまい, 実際の古典系に合わなくなる. さらに, この段階では(2.50)に似た形を得ることができるのか, またもしそれを得ることができても θ 積分の範囲をどのようにとるべきであるかが明確でない. したがって, この系に対する(2.55)の形の経路積分は現時点ではよく分からない. 次の章で(2.71)の持つ構造を解析して, この問題を解決する.

参 考 文 献

[1] メシア著「量子力学」東京図書.

[2] シッフ著「量子力学」(第３版) 吉岡書店.

[3] R. Shankar,*Principles of Quantum Mechanics*, Plenum Press, New York, 1980.

[4] P.A.M. Dirac, Physikalische Z. der Sowjetunion **3**,64 (1933).

[5] R.P. Feynman, Rev. Mod Phys. **20**, 367 (1948).

[6] ディラックとファインマンの関係については以下の文献で述べられている, S. Schweber, Rev. Mod. Phys. **58**, 449 (1986).

[7] ファインマン, ヒッブス著「量子力学と経路積分」みすず書房

[8] W. Tobocman, Nuovo Cimento **3**, 1213(1956).

[9] E.S. Abers and B.W. Lee, Phys. Rep. **9**, 1 (1973).

[10] 演算子の順序づけの問題は次の文献で多く議論されている. J.S. Dowker, J. Math. Phys. **17**, 1873(1976); B. Gaveau and L.S. Schulman, J. Math. Phys. **30**, 3019(1989).

[11] トロッター積の公式の経路積分への応用は, E. Nelson, J. Math. Phys. **5**, 332 (1964) をみよ.

[12] トロッター積の公式を使った量子力学的経路積分の他の導出は, *Techniques and Appllications of Path Integration*, Wiley, New York, 1981 をみよ.

[13] 例えば, R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quamtum Field Theory*, Cambridge University Press, New York,1987 をみよ.

[14] 例えば, E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, Oxford, 1948 をみよ.

[15] L.L. Lee, J. Math. Phys. **17**, 1988(1976).

[16] A. Truman, J. Math. Phys. **19**, 1742(1978).

[17] P.R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, New York, 1950.

[18] J.R. Klauder, Acta. Phys. Aust., Suppl. **XI**, 341 (1973).

[19] N. Wiener, J. Math. and phys. **2**, 131 (1923); N. Wiener, Acta Math. **55**, 117(1930); また M. Kac, *Probability and Related Topics in the Physical Sciences*, Interscience, New York, 1959 もみよ.

[20] A. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Mechanics—A Functional Integral Point of View*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

第3章　経路積分の評価

この章では経路積分を様々な形式で評価して, その際に使う色々なテクニックをしめす. この章で扱う形式はどれも後の解析に役に立つ. さらに経路積分を計算する様々な方法が有効であり正当であることをしめす. 遷移振幅の経路積分形式を計算する基本的な方法は, 大まかに不連続的な方法と連続的な方法に分けることができる. 不連続的な方法では, 作用の積分をリーマン和に書き換え, そして中間の値を(2.46)や(2.52)の測度を使って積分する. 一方, 連続的な方法では, 作用を汎関数として扱い, フーリエ級数を用いて古典解の周りに展開する. 後者の方法の方が前者より厳密に計算をするのは難しく, いくつかの性質は他の方法で求めた厳密な結果から推測しなければならない.

3.1節では, (2.50)から自由粒子のプロパゲーターを計算し, 演算子形式から得られた厳密な結果と一致することをしめす. 3.2節では, 自由粒子に**外場** (source)と呼ばれる時間に依存する力を加え, (2.47)に対応する形式を解析する. その結果得られた形式と汎関数微分を組み合わせて, ハイゼンベルク表示の位置演算子の時間順序積を非常にコンパクトなやり方で解析する. これにより, 生成汎関数[1]という非常に重要な概念が生じる. この汎関数を使ってプロパゲーターの摂動展開表示を定義すれば, より複雑なポテンシャルの下での粒子の運動を解析することが可能になる. 3.3節では, 準連続的な方法を使って調和振動子を解析する. その際に, 変数を取り替えたことで生じるヤコビアンの解析を注意深く行う. 3.4節では, 2.3節で扱った円周上の粒子の経路積分にトポロジー的な構造があることをポアッソン再総和法の技法を使って解析する.

3.1 自由粒子

この節では,一次元上を運動する質点という最も簡単な系を経路積分を使って解析する. 系のラグランジアンは,

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 \tag{3.1}$$

で与えられる. この系は演算子の方法を用いると大変簡単に解析することができる. そのために, まず系のハミルトニアンを書き下すと,

$$H(P, Q) = \frac{P^2}{2m} \tag{3.2}$$

となる. 固有状態 $|p\rangle$ の完全性を使い, (2.5) の内積の性質を使うと, 遷移要素は次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} Z(q_b, t_b, q_a, t_a) &= \langle\, q_b \,| e^{-iH(t_b - t_a)/\hbar} |\, q_a \,\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[-i\frac{p^2}{2m\hbar}(t_b - t_a)\right] \langle\, q_b \,|\, p \,\rangle\langle\, p \,|\, q_a \,\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-i\frac{p^2}{2m\hbar}(t_b - t_a) + i\frac{p}{\hbar}(q_b - q_a)\right] . \end{aligned} \tag{3.3}$$

これは (1.107) のガウス積分の形をしているので積分を実行できて,

$$Z(q_a, t_a, q_b, t_b) = \left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m(q_b - q_a)^2}{2(t_b - t_a)}\right] \tag{3.4}$$

を得る.

遷移振幅の経路積分表示は, 演算子形式から導き出されたので, この例の場合も経路積分を用いて計算して (3.4) と同じ結果が得られるはずである. これをしめすために, 経路積分にあらわれる作用をとびとびの和として扱うことが正しいと仮定する. (2.44) にこの系の作用を代入すると,

$$Z(q_a, t_a, q_b, t_b) = \\ \int_{q_a}^{q_b} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N/2} dq_1 \cdots dq_{N-1} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{m}{2\epsilon}(q_{j+1} - q_j)^2\right] \tag{3.5}$$

を得る.

ファインマンとヒッブス [2] に従い, 中間積分を順次実行する. まずはじめに q_0 と q_2 が関係している q_1 についての積分を実行する. その部分だけを抜き出して書くと,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\epsilon}\left[(q_2-q_1)^2+(q_1-q_a)^2\right]\right\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{4\epsilon}(q_2-q_a)^2+\frac{m}{\epsilon}(q_1-\frac{1}{2}q_2-\frac{1}{2}q_a)^2\right]\right\}\\&=\sqrt{\frac{\pi i\hbar\epsilon}{m}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{4\epsilon}(q_2-q_a)^2\right]\end{aligned}\tag{3.6}$$

となる.

はじめのガウス積分によって次に積分する変数についてのガウス型が生じる. n 番めの積分は次のようになる.

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} dq_n \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2n\epsilon}(q_n-q_a)^2+\frac{m}{2\epsilon}(q_{n+1}-q_n)^2\right]\right\}\\&=\sqrt{\frac{2\pi i\hbar n\epsilon}{(n+1)m}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2(n+1)\epsilon}(q_{n+1}-q_a)^2\right].\end{aligned}\tag{3.7}$$

例題 3.1: (3.7) をしめせ.

$N-1$ 回積分して $q_N=q_b$ とすれば, その結果, 経路積分は次のようになる.

$$\begin{aligned}&Z(q_a,t_a,q_b,t_b)\\&=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m(q_b-q_a)^2}{2N\epsilon}\right]\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N/2}\prod_{n=1}^{N-1}\sqrt{\frac{2\pi i\hbar n\epsilon}{(n+1)m}}\\&=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar N\epsilon}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m(q_b-q_a)^2}{2N\epsilon}\right].\end{aligned}\tag{3.8}$$

$N\epsilon=t_b-t_a$ を使うと, $N\to\infty$ の極限でこの結果は (3.4) に一致する. すなわちこの作用と測度では経路積分は演算子形式に一致する.

この簡単な例では, 計算する上で経路積分は演算子形式に比べて便利であるとはいいがたい. しかしながらプロパゲーターを詳しく調べると興味深い

点が明らかになる．第一に時間に依存するシュレディンガー方程式に対するグリーン関数とプロパゲーターは密接に関係していることがわかる．一次元シュレディンガー方程式のグリーン関数 $G(x,x',t,t')$ は次式を満たす関数として定義されている．

$$\left(H(-i\hbar\frac{d}{dx},x)-i\hbar\frac{d}{dt}\right)G(x,x',t,t')=i\hbar\delta(x-x')\delta(t-t')\;. \tag{3.9}$$

このグリーン関数はプロパゲーターと次のような関係にある．

$$G(x,x',t,t')=\theta(t'-t)Z(x',t',x,t)\;. \tag{3.10}$$

ただし $\theta(t'-t)$ は(2.17)で定義される階段関数である．(3.9)の関係式は(2.19)とプロパゲータの定義式(2.30)を使えばすぐにしめすことができる．(3.10)の両辺を時間微分すると，

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}G(x,x',t,t') \quad &= \quad -i\hbar\delta(t'-t)Z(x',t',x,t) \\ &\quad +\theta(t'-t)\langle\, x\,|\,He^{iH(t'-t)/\hbar}|\,x'\,\rangle \end{aligned} \tag{3.11}$$

を得る．$Z(x',t,x,t)=\langle x|x'\rangle=\delta(x-x')$ より，(3.9)式を得ることができる．

第二の点は最終結果(3.4)における古典的作用の役割についてである．古典的運動方程式 $\ddot{q}=0$ は境界条件 $q(t_a)=q_a$, $q(t_b)=q_b$ のもとで簡単に解くことができる．古典軌道を $q_c(t)$ であらわすと，

$$q_c(t)=q_a+\left(\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\right)(t-t_a) \tag{3.12}$$

となる．古典軌道に対する作用は次の値をとることは簡単にわかる．

$$S_c=\int_{t_a}^{t_b}dt\;\tfrac{1}{2}m\dot{q}_c^2=\frac{m(q_b-q_a)^2}{2(t_b-t_a)}\;. \tag{3.13}$$

これを(3.4)の結果と比べるとプロパゲーターにあらわれる指数関数の引数が古典軌道にそって積分した作用に $i/\hbar$ をかけたものに正確に一致することがわかる．3.3節では全ての二次の形をした作用に対してこれが一般的になりたつことをしめす．

3.2 外場中での運動

この節では, ポテンシャル $V(q)$ の下で時間に依存する任意の外力 $J(t)$ を受けながら一次元運動する質点を経路積分を使って考察する. 系のラグランジアンは次式で与えられる.

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) + J(t)q \,. \tag{3.14}$$

関数 $J(t)$ は粒子を加速させる外力として働き, **外場関数** (source function) と呼ばれている [1]. 後でみるように外場関数を導入することによって生成汎関数が定義できる.

$V(q) = 0$ の簡単な場合から出発し, のちほどポテンシャルがゼロでない場合を考えるのが早道である. (2.47) を不連続化して経路積分を実行する方法をとる. そのときのラグランジアン密度は,

$$\mathcal{L}(p, q) = p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} + J(t)q \tag{3.15}$$

となる. 粒子の運動は全位相空間に及んでいるので, 2.2 節で得られた測度 (2.46) を使える.

経路積分によって得られる遷移要素は,

$$\begin{aligned} Z(q_a, t_a, q_b, t_b) &= \int_{q_a}^{q_b} dq_1 \cdots dq_{N-1} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \\ &\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left[p_j(q_{j+1} - q_j) - \epsilon\frac{p_j^2}{2m} + \epsilon J(t_j)q_j \right] \right\} \end{aligned} \tag{3.16}$$

となる. p_j 積分を先に実行して q_j についてガウス型の経路積分を導くよりは, はじめに q_j 積分を行った方がより簡単である. こうすると積分の結果 $N-1$ 個のデルタ関数の積が得られ, 次式を得る.

$$Z(q_a, t_a, q_b, t_b) =$$

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int dp_0\cdots dp_{N-1}\,\delta(\epsilon J(t_0)+p_0-p_1)\cdots\delta(\epsilon J(t_{N-1})+p_{N-2}-p_{N-1})$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_{N-1}q_b-p_0q_a+\epsilon J(t_0)q_a\right]\right\}\exp\left[-\frac{i\epsilon}{2m\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}{p_j}^2\right]. \qquad (3.17)$$

はじめの $N-1$ 個の積分は今や簡単に実行できる. その結果, 経路積分は一重積分のみで次のように書くことができる.

$$\begin{aligned}Z(q_a,t_a,q_b,t_b) &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}q_a\sum_{j=0}^{N-1}\epsilon J(t_j)\right]\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}(q_b-q_a)\right.\\&\left.\quad-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\epsilon}{2m}\left[p_{N-1}-\sum_{k=j+1}^{N-1}\epsilon J(t_k)\right]^2\right\}. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

(3.18) は連続極限をとるとより簡単になる. $J(t)$ についての積分を力積 $I(t)$ であらわすことにする.

$$I(t)\equiv\int_t^{t_b}d\tau\,J(\tau)=\int_{t_a}^{t_b}d\tau\,\theta(\tau-t)J(\tau)\,. \qquad (3.19)$$

また $p_{N-1}=p$ と書くと, $\epsilon\to 0$ の極限で経路積分は,

$$\begin{aligned}Z(q_a,t_a,q_b,t_b) &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}q_aI(t_a)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}p(q_b-q_a)\right.\\&\left.\quad-\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\left[\frac{p^2}{2m}-\frac{p}{m}I(t)+\frac{1}{2m}I^2(t)\right]\right\} \qquad (3.20)\end{aligned}$$

となる. (3.20) はガウス積分の一般形 (1.107) に簡単に書き直すことができ,

$$\begin{aligned}Z(q_a,t_a,q_b,t_b) &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[q_aI(t_a)-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dt\,I^2(t)\right]\right\}\\&\quad\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t_b-t_a)\right.\\&\left.\quad+\frac{i}{\hbar}p\left[(q_b-q_a)+\frac{1}{m}\int_{t_a}^{t_b}dt\,I(t)\right]\right\} \qquad (3.21)\end{aligned}$$

を得る. 最後に p 積分を実行し [2],

$$Z(q_a,t_a,q_b,t_b) = \left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b-t_a)}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(q_b-q_a)^2}{2(t_b-t_a)}\right.\right.$$

$$
+\frac{(q_b-q_a)}{(t_b-t_a)}\int_{t_a}^{t_b}dt\,I(t)+\frac{1}{2m(t_b-t_a)}\left[\int_{t_a}^{t_b}dt\,I(t)\right]^2
+q_aI(t_a)-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dt\,I^2(t)\Bigg]\Bigg\} \tag{3.22}
$$

となる．最終結果 (3.22) は大変複雑であるが，それにもかかわらず経路積分を使うとこの結果を比較的簡単に得ることができた．

(3.22) をもう少し簡単にするために外力一定，つまり $J(t)=f$ という場合を考える．このとき (3.19) や (3.22) にあらわれる積分の値を計算することができ，その結果 (3.22) は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
Z(q_a,t_a,q_b,t_b) \quad = \quad & \left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b-t_a)}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(q_b-q_a)^2}{2(t_b-t_a)}\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{1}{2}(q_b+q_a)(t_b-t_a)f-\frac{(t_b-t_a)^3f^2}{24m}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

例題 3.2: (3.23) の指数関数の引数が $J(t)=f$ としたときの古典軌道に沿って (3.15) を積分して得られた作用の $i/\hbar$ 倍になっていることをしめせ．

例題 3.3: 二つの瞬間的な運動量固有状態間の遷移要素, $\langle p_b,t_b|p_a,t_a\rangle$ は古典的な力積条件 $p_b=p_a+f(t_b+t_a)$ が成立している時のみ値を持つことを (3.23) を用いてしめせ．

(3.22) をよくみると，これは $J(t)=0$ のとき (3.4) に還元されることがわかる．定義により，(3.22) で与えられる $Z(q_a,t_a,q_b,t_b)$ は，$J(t)$ の汎関数であり，今後の便宜のために $Z_{ab}[J]$ と書く．この汎関数は，汎関数微分すると二つの瞬間的な固有状態間のハイゼンベルク演算子 $Q(t)$ の行列要素を与えるという重要な性質を持つ．

例題 3.4: 次式をしめせ.

$$
\begin{aligned}
-i\hbar\frac{\delta Z_{ab}[J]}{\delta J(t)} &= \int_{q_a}^{q_b}\mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,q(t)\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\,\mathcal{L}(p,q)\right\} \\
&= \langle\, q_b, t_b\,|Q(t)|\, q_a, t_a\,\rangle_J\ . \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

ただし J の添え字は外場をゼロにせずにプロパゲーターを計算していることをしめしている.

例題 3.4 より, 前節で議論した自由な（外場のない）理論での $Q(t)$ の期待値は単に $J(t)=0$ での汎関数微分で与えられる. 次の結果,

$$
\frac{\delta I(t')}{\delta J(t)} = \theta(t-t') \qquad (3.25)
$$

と汎関数の連鎖微分則を使うと, $Q(t)$ の期待値は

$$
\begin{aligned}
\langle\, q_b, t_b\,|Q(t)|\, q_a, t_a\,\rangle_{J=0} &= -i\hbar\left.\frac{\delta Z_{ab}[J]}{\delta J(t)}\right|_{J=0} \\
&= \left(q_a + \frac{(q_b-q_a)}{(t_b-t_a)}(t-t_a)\right) Z_{ab}[0] \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

で与えられる. したがって, n 階の汎関数微分は, $Q(t)$ を n 回時間順にかけたものをあらわす.

例題 3.5: 次式をしめせ.

$$
-\hbar^2\frac{\delta^2 Z_{ab}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)} = \langle\, q_b, t_b\,|\,T\{Q(t_1)Q(t_2)\}\,|\, q_a, t_a\,\rangle_J\ . \qquad (3.27)
$$

ただし T は (2.20) で定義された時間順序積をあらわす.

この結論を（3.22）の例に実際に実行する. 汎関数連鎖微分則より,

$$
\langle\, q_b, t_b\,|\,T\{Q(t_1)Q(t_2)\}\,|\, q_a, t_a\,\rangle_{J=0} = -\hbar^2\left.\frac{\delta^2 Z_{ab}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\right|_{J=0}
$$

$$
= \Bigg\{ i\hbar\theta(t_2-t_1)\frac{(t_b-t_2)(t_1-t_a)}{m(t_b-t_a)} + i\hbar\theta(t_1-t_2)\frac{(t_b-t_1)(t_2-t_a)}{m(t_b-t_a)}
$$

$$+\left[q_a+\frac{(q_b-q_a)}{(t_b-t_a)}(t_1-t_a)\right]\left[q_a+\frac{(q_b-q_a)}{(t_b-t_a)}(t_2-t_a)\right]\Bigg\}Z_{ab}[0] \qquad (3.28)$$

を得る．さらに高い次数の汎関数微分は，高い次数の時間順序積を生み出す．ゆえに，(3.22) で与えられる $Z_{ab}[J]$ は，自由な（ポテンシャルがゼロの）理論の時間順序積に対する**生成汎関数** (generating functional) となっている．

(3.28) から，二つの $Q(t)$ の時間順序積は $\hbar$ に比例する部分と $\hbar$ が掛からない部分に分けることができることがわかる．$\hbar$ がかかっていない部分は $Q(t_1)$ と $Q(t_2)$ の期待値の単なる積になっている．一方，$\hbar$ に比例する部分は時間順序積にはじめてあらわれる項であり，量子効果をあらわしている．この項は，$Q(t_1)$ と $Q(t_2)$ が自由場の理論でも交換しないことから生じる．$\hbar$ に比例する項は量子効果によって生じるので，時間順序積の**連結部分** (connected piece) と呼ぶ．この呼び方の重要性は 8 章で量子場の理論を摂動論で扱い，それを図を用いて説明する時に明らかになる．

時間順序積の $\hbar$ がかかっていない部分には新しい情報は含まれていないので，この部分は取り除いて考えるのが便利だ．これには次の新しい生成汎関数 [3,4] を使えばよい．

$$W_{ab}[J]=-i\hbar\ln Z_{ab}[J]\,. \qquad (3.29)$$

汎関数 $W_{ab}[J]$ は時間順序積の連結部分の生成汎関数である．$W_{ab}[J]$ の汎関数微分のどの次数でも，それよりも低い次数から生じる部分は現れないし，得られる値は 1 に規格化されている．

このことを，実際に数階の汎関数微分を行なって確かめてみる．一階微分すると，

$$\frac{\delta W_{ab}[J]}{\delta J(t)}=-i\hbar\frac{1}{Z_{ab}[J]}\frac{\delta Z_{ab}[J]}{\delta J(t)}\equiv\langle Q(t)\rangle_J \qquad (3.30)$$

を得る．(3.26) と比較すると，$\langle Q(t)\rangle_J$ は明らかに $Q(t)$ の規格化された期待値であることがわかる．つまり，掛かっていた係数 $Z_{ab}[J]$ は割られてなくなったのである．次に，二階微分は，

$$-i\hbar\frac{\delta^2 W_{ab}[J]}{\delta J(t_1)\,\delta J(t_2)}=$$

$$-\hbar^2\frac{1}{Z_{ab}[J]}\frac{\delta^2 Z_{ab}[J]}{\delta J(t_1)\,\delta J(t_2)}+\hbar^2\left(\frac{1}{Z_{ab}[J]}\right)^2\frac{\delta Z_{ab}[J]}{\delta J(t_1)}\frac{\delta Z_{ab}[J]}{\delta J(t_2)} \qquad (3.31)$$

となる. これを (3.30) と比較すると, 右辺の第 2 項目は,

$$\hbar^2\left(\frac{1}{Z_{ab}[J]}\right)^2\frac{\delta Z_{ab}[J]}{\delta J(t_1)}\frac{\delta Z_{ab}[J]}{\delta J(t_2)}=-\langle Q(t_1)\rangle_J\langle Q(t_2)\rangle_J \qquad (3.32)$$

となり, (3.31) は次のようにあらわすことができる.

$$-i\hbar\frac{\delta^2 W_{ab}[J]}{\delta J(t_1)\,\delta J(t_2)}=\langle T\{Q(t_1)Q(t_2)\}\rangle_J-\langle Q(t_1)\rangle_J\langle Q(t_2)\rangle_J\,. \qquad (3.33)$$

(3.33) と (3.28) を比較すると, 連結された部分だけが残っていることがわかる.

より高次の微分を次々に調べてゆけば $W_{ab}[J]$ の一般的な構造を帰納的にしめすことができる. しかし, (3.22) より, $V(q)=0$ のときには $W_{ab}[J]$ の一階微分と二階微分の部分のみがゼロでないことがわかる. 相互作用, すなわち自明でない $V(q)$ が高次の微分を与えることを後にみる. 実際にこのことをしめすために, ゼロでない $V(q)$ を持つ系を考える. 一般的な相互作用, 特に非線形なポテンシャルのときは解析的に解くことはほとんど不可能になるのが, これまでに得た結果を使って相互作用のある系で形式的に摂動級数による表示を求めることはできる.

(3.15) に戻って, こんどはラグランジアン密度が次のような形をしているとする.

$$\mathcal{L}(p,q)=p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-V(q)+J(t)q\,. \qquad (3.34)$$

もちろん, この理論が意味のある量子論であるためには $V(q)$ に多くの制限が必要である. 以下ではこれらの条件は満たされているとする. しかしながら, ここでの取り扱いは形式的な一般論であり, 実際に相互作用のある系を定義する際にはさらに多くの困難に出会うかも知れないということに気をつけなければならない.

(3.34) のラグランジアン密度のプロパゲーターは, 経路積分を用いて,

$$Z_{ab}[J]=\int_{q_a}^{q_b}\mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\left[p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-V(q)+J(t)q\right]\right\} \qquad (3.35)$$

とあらわすことができる. もし $V(q)$ が q の 2 次より高次の項, すなわち非線形項を含むなら経路積分はガウス型でなくなり, 通常結果を閉じた形で解析的にあらわすことが不可能になる. 計算を進めるために, (3.34) を級数展開して書き換える. このために, 次の汎関数微分演算子,

$$V\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(t)}\right) \tag{3.36}$$

を導入する. これは単にポテンシャル $V(q)$ の $q(t)$ を $-i\hbar\delta/\delta J(t)$ で置き換えたものである. この汎関数微分演算子とポテンシャルの級数展開および汎関数微分の規則を用いて, $Z_{ab}[J]$ を次のようにあらわすことができる.

$$\begin{aligned} Z_{ab}[J] &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\, V\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(t)}\right)\right\} \\ &\quad \times \int_{q_a}^{q_b} \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\left[p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}+J(t)q\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

(3.37) にあらわれる経路積分はこの節で扱った $V(q)=0$ のときと同様のものに過ぎない. したがって, プロパゲーターは (3.22) のようになり, これを $Z_{ab}^0[J]$ とあらわす. これは相互作用を含む理論の "基底" あるいは最低次のプロパゲーターの役割を果たす. 相互作用する系のプロパゲーターは次のように書ける.

$$Z_{ab}[J] = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\, V\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(t)}\right)\right\} Z_{ab}^0[J]\,. \tag{3.38}$$

これは指数部分を形式的に汎関数級数展開し生成汎関数にあてはめたものと理解できる. (3.38) の表式はプロパゲーターを摂動論的にあらわしたもので, 他の方法で導いた摂動論にある全ての規則や組み合わせを含んでいる. もちろん (3.38) のような形式的な表式では, 摂動級数の各項がよく定義されており, 級数が期待される値に収束すると暗に仮定されている. これらの仮定が正しいかどうかは, 具体的に様々な場合によって異なってくる.

例題3.6: ゼロにならない2次より上の最も低い次数の $W_{ab}[J]$ の汎関数微分は$V(q)$ あるいは $V(q)$ の級数展開 の q の最低次の項に一致していることをしめせ.

摂動展開表示に関して次の二つを注意しておく. まずはじめに, $J=0$ で $V\neq 0$ の場合だ. このような場合, (3.38) の級数展開は $J=0$ で得られると考える. それはすなわち, 極限操作する前の (3.35) から出発することを意味する. しかしながら, (3.35) の $J\to 0$ の極限で書いた経路積分にはこの極限で (3.35) がよく定義されているという仮定が含まれている. $J=0$ で (3.35) の $V(q)$ が解析的でないときがある. そのような場合, $J\to 0$ の極限で経路積分が一つ以上の値をとる可能性がある. したがって, 正しい物理量を決定するためには他の基準を使わなければならない. 経路積分のこのような側面は, 次の章で定義する量子力学の有効作用を4.5節の対称性の自発的破れについて調べるために解析する際に, 再び議論する. 二番目は, 正しい結果が得られるような摂動論をつくるためには $V(q)$ はq の二次より高い次数の項のみから構成されていなくてはならないと言うものだ. この理由は単純だ. q の二次あるいは一次の項はガウス積分できるので "基本" 経路積分 $Z^0_{ab}[J]$ に含まれるからである. 次節では二次形式のラグランジアン密度を解析するきわめて一般的な手法をしめす.

3.3 連続化する手法

この節では, 経路積分の作用をリーマン和を使わずに, 連続的な汎関数として扱う手法を発展させる. 前の二つの節で, 経路積分を実行した後の最終的な形にあらわれる指数関数部分は, 古典的な軌跡の作用になっていることを指摘した. この節では, この結果が二次のラグランジアン密度で厳密になりたつことをみることにする. 連続化の手法を使うと指数関数部分はすぐに計算でき, 経路積分の測度は作用の中にあらわれる微分演算子の固有モードの足し上げになることがわかる.

(2.50)の経路積分から出発する．ただし測度 $\overline{\mathcal{D}}q$ は(2.52)で与えられるものとする．$N-1$ 個の中間積分の積分範囲より，測度の中に自明でないヤコビアン行列式が生じずにどの変数もある定数分だけ並行移動できる．$q_c(t)$ を $q(t_a)=q_a$ から $q(t_b)=q_b$ までの古典的な軌跡とすると，新しい積分変数 x_j は次のように定義できる．

$$q_j = q_c(t_j) + x_j\ . \tag{3.39}$$

このような変数の置き換えで測度は単に $\overline{\mathcal{D}}x$ となる．一方ラグランジアン密度は q_c の周りで展開できて次のようになる．

$$\int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(\dot{q}, q) = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \left[\mathcal{L}(\dot{q}_c, q_c) + x\frac{\partial}{\partial q_c}\mathcal{L}(\dot{q}_c, q_c) + \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_c}\mathcal{L}(\dot{q}_c, q_c) + \mathcal{L}_R(\dot{x}, x)\right]\ . \tag{3.40}$$

ただし，$\mathcal{L}_R$ は新しい変数 x の二次あるいはそれより高次の項をあらわす．もし元のラグランジアン密度が二次以上の項を含まないならば $\mathcal{L}_R(\dot{x}, x)$ が $\mathcal{L}(\dot{x}, x)$ に一致することを確認するのは簡単である．(3.40)を部分積分し，$q_c(t)$ に対してオイラー・ラグランジュ方程式(1.41)を適用すると次式を得る．

$$\int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(\dot{q}, q) = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(\dot{q}_c, q_c) + \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}_R(\dot{x}, x)\ . \tag{3.41}$$

結局，変数の付け替えで経路積分は次のようになる．

$$\int_{q_a}^{q_b} \overline{\mathcal{D}}q\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(\dot{q}, q)\right) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(\dot{q}_c, q_c)\right] \int_0^0 \overline{\mathcal{D}}x\, \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}_R(\dot{x}, x)\right]\ . \tag{3.42}$$

二番目の積分の積分範囲0は元の積分変数の範囲 $q_0 = q_a$, $q_N = q_b$ と(3.39)から得られる．q_c はその構成法により，$q_c(t_0) = q_a$ および $q_c(t_N) = q_b$ を満たす．ゆえに x を t の関数とみなすと $x(t)$ は $t = t_a$ および $t = t_b$ でゼロになる．経路積分で古典解を特別に選んだ利点は今や明らかだ．つまり今のようにすれば境界条件である初期および終状態が簡単になるのである．

もしはじめのラグランジアン密度が二次関数ならば, $\mathcal{L}_R = \mathcal{L}$ である. このとき, (3.42) の経路積分の結果に q_a および q_b はあらわれない. ゆえに, t_a, t_b の値とラグランジアン密度がはじめから持っていたパラメータのみに依存する. したがって, 二次あるいは一次の項のみからなるラグランジアン密度の場合は経路積分を常に厳密に計算でき, 一般的に次のように書ける.

$$Z(q_a, t_a, q_b, t_b) = F(t_a, t_b) e^{iS_c/\hbar} . \tag{3.43}$$

ただし, S_c は古典的軌跡を使って計算した作用である. 係数 $F(t_a, t_b)$ は (3.42) に残った経路積分から得られ, q_a および q_b に依存しない. $\mathcal{L}_R$ が x の3次あるいはそれより高次の項を含むならこの性質はなりたたなくなる.

(3.43) を計算して係数 $F(t_a, t_b)$ を得る際, 積分変数をもっと都合のよいものに取り替えてもよい. $x(t)$ は時刻 t_a および t_b でゼロになり, 中間の時刻で $N-1$ 個の積分変数があるので $x(t)$ は次のようにフーリエサイン級数の形で書くことができる.

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sin \frac{n\pi}{T}(t - t_a) . \tag{3.44}$$

ただし $T = t_b - t_a$ で a_n は任意定数である. $N \to \infty$ の極限で (3.44) は $x = 0$ ではじまり $x = 0$ で終わる区分的に連続な任意の経路をあらわす.

a_n を新しい変数として, (3.44) を変数変換の定義式とみることができる. x_j と新しい変数との関係は次のようになる.

$$x_j = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sin \frac{n\pi}{T}(t_j - t_a) . \tag{3.45}$$

(1.100) によれば, このような変数変換による測度の変換にともなうヤコビアンがあらわれる. (3.45) の変数変換によるヤコビアンは,

$$J \equiv J(a_1, \ldots, a_{N-1}) = \det \left[\sin \frac{n\pi}{T}(t_j - t_a) \right] \tag{3.46}$$

となる. ただし, n と j で行列の成分をあらわし, その行列式がヤコビアンになる.

この行列式を直接計算することは困難であり, 以前の結果から値を予想する方がはるかにたやすい. このために, 経路積分の結果がすでに厳密に分かっている3.1節で扱った自由粒子のラグランジアンに連続化の手法を当てはめることにする. コサイン関数の直交性を使うと, 作用の残った項は次のように書ける.

$$\int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}_R(\dot{x}, x) = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 = \sum_{n=1}^{N-1} m \frac{a_n^2 \pi^2 n^2}{4T} \; . \tag{3.47}$$

(3.46) の結果より, ヤコビアンは a_n に依存しない. (3.43) および (3.47) の結果より, 経路積分は上の変数変換を代入して次のようになる.

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2} = \\ J \int \left(\frac{Nm}{2\pi i\hbar T}\right)^{N/2} da_1 \cdots da_{N-1} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} m \frac{a_n^2 \pi^2 n^2}{4T}\right) \; . \tag{3.48}$$

ただし $\epsilon = T/N$ とした. $N-1$ 重ガウス積分を実行すると次のようになる.

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2} = \left(\frac{mN}{2\pi i\hbar T}\right)^{N/2} J \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{2\pi i\hbar T}{m\pi^2}\right)^{1/2} \frac{1}{n} \; . \tag{3.49}$$

この結果から,

$$J(a_1, \ldots, a_{N-1}) = N^{-N/2} \pi^{N-1} (N-1)! \tag{3.50}$$

となる. ゆえにヤコビアンは T に依存しない.

このヤコビアンは, 今と同様の変数変換をほどこすことにより調和振動子のプロパゲーターを求める際に使うことができる. ラグランジアン密度は次の形をしていると仮定する.

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2 \; . \tag{3.51}$$

ラグランジアン密度は二次なので, 今までとまったく同じ解析が使える. 境界条件を満たす古典解は,

$$q_c(t) = A \sin(\omega t + \delta) \tag{3.52}$$

となる．ただし，A および δ は次の境界条件で決定される．

$$\begin{aligned} \cot\delta &= \frac{q_b}{q_a \sin\omega T} - \cot\omega T\,. \\ A &= \frac{q_a}{\sin\delta}\,. \end{aligned} \tag{3.53}$$

これらの結果を使うと，古典軌道にともなう作用は，

$$\begin{aligned} S_c &= \int_{t_a}^{t_b} dt\ \left[\tfrac{1}{2}m\dot{q}_c^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2 q_c^2\right] \\ &= \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(q_a^2+q_b^2)\cos\omega T - 2q_a q_b\right] \end{aligned} \tag{3.54}$$

となる．

あとは(3.43)の係数さえ計算すればよい．これには(3.44)のように変数変換するのが最もよい．そうすると，この係数を決定する経路積分にあらわれる作用は，

$$\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\ \left[\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2\right] = \frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}\tfrac{1}{2}m\left(\frac{n^2\pi^2}{T} - \omega^2 T\right)a_n^2 \tag{3.55}$$

となる．よって，係数は単に次のようなガウス積分の積により与えられる．

$$\begin{aligned} F(T) = \left(\frac{mN}{2\pi i\hbar T}\right)^{N/2} & J(a_1,\ldots,a_{N-1}) \\ &\times\int da_1\cdots da_{N-1}\ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{m}{2}\left(\frac{n^2\pi^2}{T}-\omega^2 T\right)a_n^2\right]. \end{aligned} \tag{3.56}$$

(3.56)の結果は，複素形式の経路積分は危険性をはらんでいることをしめしている．というのも ${a_n}^2$ の係数は $\omega T = n\pi$ のときゼロになり，n 番目のモードの積分が定義できなくなってしまう．この状況はウィック回転，$T \to -iT$，で解析接続することにより回避できる．指数関数部分は，

$$\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{m}{2}\left(\frac{n^2\pi^2}{T}-\omega^2 T\right)a_n^2 \ \xrightarrow{W}\ -\frac{1}{\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{m}{2}\left(\frac{n^2\pi^2}{T}+\omega^2 T\right)a_n^2 \tag{3.57}$$

となり，これは全てのモード，全ての時刻でなりたつ．

通常の実ガウス積分のときと同様に (3.50) のヤコビアンを使うと, ウィック回転した係数,

$$F(T)=\left(\frac{m}{2\pi\hbar T}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{N-1}\left(1+\frac{\omega^2T^2}{n^2\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.58}$$

を得る. $N\to\infty$ の極限で (3.58) は次の関係式を用いて簡単にできる.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\omega^2T^2}{n^2\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{\omega T}{\sinh\omega T}\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{3.59}$$

ウィック回転した係数は最終的に,

$$F(T)=\left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar\sinh\omega T}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.60}$$

となる. 実際に (3.60) に逆ウィック回転 $T\to iT$ を使って実時間に戻し $\sinh i\omega T=i\sin\omega T$ を使うと係数は結局,

$$F(T)=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.61}$$

となる. (3.54) と (3.61) を (3.43) に代入すると正しい調和振動子のプロパゲーターを得ることができる.

二次のラグランジアンを持つ他の例に, 時間に依存する $J(t)q$ の形をした外場項を持つ調和振動子の生成汎関数 $Z_{ab}[J]$ がある. このときのプロパゲーターは係数 (3.61) の組み合わせから得られ, 古典的な作用 [2] は,

$$\begin{aligned}S_c=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}&\left\{\frac{2q_a}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b}dt\,J(t)\sin\omega(t-t_a)\right.\\&-\frac{2}{m^2\omega^2}\int_{t_a}^{t_b}dt\,dt'\,J(t)J(t')\theta(t-t')\sin\omega(t_b-t)\sin\omega(t'-t_a)\\&\left.+(q_a^2+q_b^2)\cos\omega T-2q_aq_b+\frac{2q_b}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b}dt\,J(t)\sin\omega(t_b-t)\right\}\end{aligned} \tag{3.62}$$

となる.

例題 3.7: (3.62) を確かめよ.

この節で得られた一般的な結果(3.43)によれば，二次のラグランジアン密度では経路積分に主要な寄与をするのは古典的軌跡であることがわかる．これは大変興味深い．他の経路はどんなものであろうと全て単に(3.43)の $F(t_a, t_b)$ に含まれるに過ぎない．この結果を(3.29)で定義される生成子 $W_{ab}[J]$ と結びつけると，二次の理論では大事な経路は古典軌道だけであることが明らかだとわかる．これは外場 $J(t)$ は $F(t_a, t_b)$ に含まれておらず，J 依存性は全て古典軌道にともなう作用に含まれていることからわかる．さらにこれは場の理論で時間順序積の生成汎関数を計算する際にもなりたつ．

3.4 トポロジー的な測度

この節では，2.3節で考察した半径 R の円周上を運動する質点の経路積分(2.71)を解析する．この経路積分は，

$$\langle \theta_b, t_b \,|\, \theta_a, t_a \rangle = \lim_{N\to\infty} \int_{\theta_a}^{\theta_b} d\theta_1 \cdots d\theta_{N-1} \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{n_0=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_{N-1}=-\infty}^{\infty}$$
$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left[n_j \hbar (\theta_{j+1} - \theta_j) - \epsilon \frac{n_j^2 \hbar^2}{2mR^2} - \epsilon V(\theta_j) \right] \right\} \tag{3.63}$$

で与えられる．ただし，θ_j の積分範囲は 0 から 2π である．

まず(3.63)が次のラグランジアン密度を持つ(2.50)の経路積分とどのように同じであるかを理解しなければならない．

$$\mathcal{L}(\dot\theta, \theta) = \tfrac{1}{2} m R^2 \dot\theta^2 - V(\theta) \,. \tag{3.64}$$

もしポテンシャル $V(\theta)$ がゼロなら，角度方向の積分はすぐにできて経路積分の構造を明らかにすることができる．しかし，$V(\theta)$ が簡単な形をしていなければこれは不可能になる．

しかしポアッソンの再総和法(Poisson resummation)を経路積分に使うと，これが可能になる[6]．今考えている経路積分(3.63)はヤコビの第三種シータ関数（今後これをΘ_3 とあらわす)の積で書きあらわされているので，ポアッ

ソンの再総和法の手法を適用できる. ヤコビの第三種シータ関数は, 複素数を使って次のように定義される.

$$\Theta_3(A|s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\pi An^2 + 2i\pi ns\right) . \tag{3.65}$$

これは明らかに(3.63)と似た形をしている.

ポアッソンの再総和法では, Θ_3 が次のようにも書けるということを使う.

$$\Theta_3(A|s) = \frac{1}{\sqrt{iA}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{\pi}{A}(s+j)^2\right] . \tag{3.66}$$

(3.66)は例題1.3を使い簡単に証明できる. 例題1.3で $y=0$ および $2L=1$ とすると, 恒等式,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn\, f(n) e^{i2\pi nj} \tag{3.67}$$

を得る. (3.67)を(3.65)に代入すると, ヤコビのシータ関数は,

$$\Theta_3(A|s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn\, \exp\left[-i\pi An^2 + i2\pi n(s+j)\right] \tag{3.68}$$

となる. (3.68)の n での積分は(1.107)のような通常のガウス型をしており, 簡単に積分できて(3.66)を得る.

ポアッソンの再総和法を(3.63)にあてはめる. 元々 N 個の和があったので,

$$\begin{aligned} &\langle\, \theta_b, t_b \,|\, \theta_a, t_a \,\rangle = \\ &\int_{\theta_a}^{\theta_b} \left(\frac{mR^2}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N/2} d\theta_1 \cdots d\theta_{N-1} \sum_{n_0=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_{N-1}=-\infty}^{\infty} \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\left[\frac{mR^2}{2\epsilon}(\theta_{j+1}-\theta_j+2\pi n_j)^2 - \epsilon V(\theta_j)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.69}$$

となる. これで中間の和は一つ以外全て θ_j 積分の積分範囲の拡張で吸収することができる. このことをみるために, はじめの θ_1 に関する積分を考える.

ポテンシャルが周期的であるので, 以下のように n_1 の和をとる代わりに θ_1 積分の範囲を $-\infty$ から ∞ にできる.

$$\sum_{n_0=-\infty}^{\infty}\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \exp\left\{\frac{imR^2}{2\hbar\epsilon}\left[(\theta_1-\theta_a+2\pi n_0)^2 + (\theta_2-\theta_1+2\pi n_1)^2\right] - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(\theta_1)\right\}$$
$$= \sum_{n_0=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1\ \exp\left\{\frac{imR^2}{2\hbar\epsilon}\left[(\theta_1-\theta_a+2\pi n_0)^2+(\theta_2-\theta_1)^2\right] - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(\theta_1)\right\}\ . \tag{3.70}$$

次に, θ_2 積分を上と同様にして次を得る.

$$\sum_{n_0=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2\ \exp\left\{\frac{imR^2}{2\hbar\epsilon}\left[(\theta_1-\theta_a+2\pi n_0)^2 + (\theta_2-\theta_1)^2+(\theta_3-\theta_2+2\pi n_2)^2\right] - \frac{i\epsilon}{\hbar}\left[V(\theta_2)+V(\theta_1)\right]\right\}$$
$$= \sum_{n_0=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_2\ \exp\left\{\frac{imR^2}{2\hbar\epsilon}\left[(\theta_1-\theta_a+2\pi n_0)^2 + (\theta_2-\theta_1)^2+(\theta_3-\theta_2)^2\right] - \frac{i\epsilon}{\hbar}\left[V(\theta_2)+V(\theta_1)\right]\right\}. \tag{3.71}$$

ただし, $V(\theta)$ の周期性と θ_1 の並進不変性がこの計算での重要な点である. 上記のような計算を $N-1$ 個の和を $N-1$ 個の中間の角度積分に吸収できるまで繰り返す. その結果,

$$\langle\,\theta_b, t_b\,|\,\theta_a, t_a\,\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\theta_a-2\pi n}^{\theta_b}\left(\frac{mR^2}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N/2} d\theta_1\cdots d\theta_{N-1} \times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\epsilon\left[\frac{1}{2}mR^2\frac{(\theta_{j+1}-\theta_j)^2}{\epsilon^2} - V(\theta_j)\right]\right\} \tag{3.72}$$

を得る. ただし θ_j 積分の積分範囲は $\pm\infty$ である. 経路積分の連続極限で (3.64) の指数部には古典的作用があらわれる.

(3.72) の経路積分は無限に長い直線上を運動する粒子に関する経路積分の無限個の和の形をしている. 和の各々の項は異なる初期角度 $\theta_a - 2\pi n$ で分類

されている. ここで整数 n にはいったいどんな意味があるのかと当然考えるだろう. 粒子が運動している空間あるいは**多様体** (manifold) (これを $\mathcal{M}$ と書く) は円であり, 円はトポロジー的に自明でないのでこのような整数 n がでてきたのである. 多様体はそれを覆うのに二つ以上の開集合が必要なときトポロジー的に自明でないと言う. 円はそれを覆うのに二つの開集合が必要なのでこの意味でトポロジー的に自明でないと言うことができる.

トポロジー的に自明でない空間を特徴づける別の方法に空間の**ホモトピー類** (homotopy classes) を考える方法がある [7, 8, 9]. ホモトピー類は閉じた経路あるいは面を多様体に埋め込んだり写像したりする方法にどのようなものがあるかによって区別される. 最も視覚的で単純な例では, いま考えている多様体に閉じた経路を写像することを考える. お互いに連続的に変形できる全ての閉じた経路は同値類に分類される. 連続的な変形とは閉じた経路を無限に伸びるゴムの紐のように扱い, この紐がどのようにでも伸ばしたり縮めたりでき, ちぎれたりしないことを言う. 数学的には, これを同値類に属する二つの要素間に**同相写像** (homeoporphism) が存在すると言う. ある多様体の上で閉じた経路を特徴づけるのに必要な全ての同値類の集合を π_1 と呼ぶ. これはその多様体の基本あるいは第一ホモトピー群である. なぜ**群**と呼ぶかの説明はこの本でのちほど行う. 例えば, 穴が一つあいている二次元多様体を考える. 穴の周りを一周する円周は, 穴の周りを回らない円周に連続変形で移り変われない. 多様体上のどの点を通るどんな経路も連続変形で一点に移り変われるなら, 多様体の基本群は自明であると言う.

円周のときは, 円周上の二点をつなぐどのような連続的な経路もその経路の円周の周りを回った回数で区別できる. この整数を**巻数** (winding number) と言う. 実直線から円周へのいかなる写像も実直線が何回円周に巻きついたかという巻数で区別できる. 異なる巻数を持つ経路どうしは, 円周の持つ性質上互いに連続変形で移り変われず, これらの異なる経路間には同相写像が存在しない. ゆえに異なる巻数を持つ経路は異なる同値類に属する. このように円周の π_1 は整数の集合 $\mathcal{Z}$ である.

高次のホモトピー群は球面や超球面といったより高い次元の閉じた面を多様体に埋め込む仕方によっている．これらの高い次元の閉じた面を S_n とあらわす．このとき S_1 は円周, S_2 は球面をあらわす．高次元の対象, 特に S_3 については7.6節で再び議論する．多様体 $\mathcal{M}$ 上の高次のホモトピー群を $\pi_n(\mathcal{M})$ とあらわす．これは巻数の概念の高次元への拡張と考えればよい．特に重要なホモトピー類に多様体 $\mathcal{M}$ それ自身が超球面 S_n になっているものがある．それは次のようなっていることがしめせる．

$$\pi_n(S_n) = \mathcal{Z}\,, \;\; \pi_n(S_m) = 0 \;\; (n < m)\,. \tag{3.73}$$

円周が自明でないトポロジー的な構造を持ち, 経路積分は円周を含む全ての経路に重みをかけたものの和であることから, 円周上の二点をつなぐ経路の巻数が経路積分にあらわれても別におかしくない．ポアッソンの再総和法を使って円周上の経路積分は実直線から円周への写像を使った経路積分に書き換えられた．経路積分には全ての可能な写像が含まれているので, 全ての巻数が出てくるのだ．θ_a を $2\pi n$ だけずらすことによって巻数 n のθ_a から θ_b への経路を考えることになる．(3.72) をよくみると, 経路積分の測度は円周上の経路についてホモトピー類が異なるものごとの和に分割されている．

実直線上の自由粒子のプロパゲーター (3.4) を使うと $V(\theta) = 0$ のときは経路積分を厳密に計算できる．その結果,

$$Z(\theta_a, t_a, \theta_b, t_b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{mR^2}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{mR^2(\theta_b - \theta_a + 2\pi n)^2}{2(t_b - t_a)}\right] \tag{3.74}$$

となる．この結果も巻数をあらわす整数を含んでいる．この計算を問題にしておく．

> **例題3.8**: (3.74) の指数部が巻数 n を持つ古典的軌跡に対する古典的作用によって与えられることをしめせ．

例題3.8の結果は, 特に係数が重要でないならば, 経路積分はその理論が持つ全てのトポロジー的に異なる古典的配位を足し上げるとよい近似になること

をしめしている. この結果は以下のようにしてより複雑な系に一般化できる. 経路積分は束縛状態のない系を記述すると仮定されており, はじめは円周, 球面, トーラスといった**コンパクト** (compact) な多様体の上で定義されていた. コンパクトな多様体は閉じていて境界がある. 経路積分の測度はいくつかあるいは全ての積分変数の積分範囲から生じる. この節で得られた結果を一般化すると測度の極限は次のように取り替えられる. つまり実直線あるいはその高次元版 R^n が多様体に射影されるように測度極限をとるのである. その代わりに元の多様体の同値類 π_n とトポロジー的につながっていない全ての和をとらなければいけなくなる. このアイデアは自明でないトポロジー的な構造を持つ場の理論を考える際に再びあらわれる.

経路積分形式で束縛状態を取り扱うことの難しさについては2.3節で述べた. 束縛状態に対する一般的な問題はまだあるが, しかし束縛状態を生じるポテンシャルを持ついくつかの系はこの節と同様の手法で解析できる. ポテンシャルから束縛状態が生じるので, 少なくとも一つの量子数で区別されるとびとびの状態が存在しうる. いくつかの例では, これらの量子数に再総和の手法を使って経路積分の標準形 (2.50) を得ることができる. このような例を例題3.9にしておく.

例題3.9: 無限に深い巾 L の井戸型ポテンシャルに束縛されている質点を考える. このとき, 遷移振幅の経路積分表示での測度が整数で区別されており, この整数は粒子が最後の位置に到達するまでに壁に衝突した回数をあらわしていることをしめせ.

量子力学で扱う最も重要なポテンシャルはおそらくクーロンポテンシャルであろう. 標準的な $1/r$ の形のポテンシャルは微分形式のシュレディンガー方程式では大変詳しくわかっているが, 経路積分形式ではそうは言えない. 系の束縛状態を軌跡の部分集合を考えることによって再現することは容易なことでない.

参 考 文 献

[1] 生成汎関数の概念は, W. Heisenberg and H. Euler, Z. Physik **98**, 714(1936) によってはじめて導入され, シュウィンガーによって現代的な形に書き換えられた. J. Schwinger, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **37**, 452 (1951); J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951); J. Schwinger, *Particles and Sources*, Gordon and Breach, New York, 1969. また K. Symanzik, Z. Natürforschung **9A**, 10 (1954) もみよ.

[2] ファインマン, ヒッブス著 「量子力学と経路積分」 みすず書房.

[3] この定義は G. Jona-Lasinio, Nuovo Cimento **34**, 1790 (1964) をみよ. また [4] もみよ.

[4] B. Zumino in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics*, edited by S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.

[5] 例えば次のテキストをみよ. シッフ著 「量子力学」 (第 3 版) 吉岡書店.

[6] L.S. Schulman, Phys. Rev. **176**, 1558 (1968).

[7] T. Eguchi, P.B. Gilkey, and A.J. Hanson, Phys. Rep. **66**, 213 (1980).

[8] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, New York, 1983.

[9] M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Adam Hilger, Bristol, 1990.

[10] M. Carreau, E. Farhi, and S. Gutmann, Phys. Rev. D**42**, 1194 (1990).

第4章　その他の応用

この章では, 量子力学の経路積分法の拡張について説明する. この章で説明する概念は, 場の理論の経路積分にも応用でき, 後の章にも登場する. ここではこれらを数学的に簡明に説明する.

はじめに, 4.1節で自然単位系を導入する. 4.2節では量子力学の分配関数と経路積分との関係について説明し, そのいくつかの簡単な系への応用について述べる. 4.3節では, 量子力学における対称性の概念を発展させ, 経路積分から得られる生成汎関数の様々な形式で対称性の意味について議論する. 4.4節では, コヒーレント状態を用いて調和振動子をあらわし, このコヒーレント状態を使って真空の遷移振幅汎関数を経路積分表示する. 4.5節では簡単な量子力学系で対称性の自発的破れについて議論する. そして4.2節で定義される自由エネルギーの形から有効ポテンシャルを導く. 調和振動子近似では, 基底状態はコヒーレント状態として理解できる. 4.6節で経路積分に拘束条件を導入することについて議論してこの章をしめくくる.

4.1　自然単位

量子力学や量子場の理論の計算にはプランク定数 (Planck's constant), $\hbar = 1.05 \times 10^{-27}$ erg sec, や光の速さ, $c = 2.99 \times 10^{10}$ cm/sec が頻繁にでてくる. そこで**自然単位** (natural units) と呼ばれる, $\hbar$ と c を 1 にとる単位系を使うと計算が大変簡単になる. これらの二つの定数を 1 にするということは, 三つの基本的な測度をあらわす単位, センチメートル, 秒, グラムのうちの二つ

を取り除くことと同等である．その結果，自然単位系ではこれらの基本的な単位のうちのただ一つ，あるいはそれらを組み合わせて作られる単位であるエネルギーといったようなただ一つの単位で全ての物理量をあらわす．

例えば，一つの特徴的な質量として電子の質量 m_e を考えよう．これはSI単位系では $m_e = 9.1 \times 10^{-28}$ gm である．自然単位系では，電子ボルトで表して，$m_e = m_e c^2 = 8.19 \times 10^{-7}\,\mathrm{erg} = 0.511$ MeVとなり，長さの逆数の単位で表すと，$m_e = (m_e c)/\hbar = 2.59 \times 10^{10}\,\mathrm{cm}^{-1}$ となり，時間の逆数の単位では $m_e = (m_e c^2)/\hbar = 7.75 \times 10^{20}\,\mathrm{sec}^{-1}$ と表される．逆に式の中に $1/m_e$ が出てくれば，これは時間を使って，$\hbar/(m_e c^2) = 1.29 \times 10^{-21}$ sec，長さを使って，$\hbar/(m_e c) = 3.86 \times 10^{-11}$ cmと表される．

これ以降，この本では，８章でパラメーターの数え上げをする際に一時的に $\hbar$ を使う以外は自然単位系を採用する．基本単位には長さを選ぶ．そうすれば全ての物理量は長さの巾乗で書ける．唯一の例外として，質量を表す時にはMeVを使う．ただし，自然単位系で1 MeV $= 5.07 \times 10^{20}\,\mathrm{cm}^{-1}$ である．

はじめに自然単位系を使って物理量を計算しておいて後で，$\hbar$ と c を適当に結果に挿入すればSI単位に変換できる．例えば，粒子の寿命を計算して，その結果が，md^2 と得られたとする．ただし m はある質量で，d はある長さとする．この結果に正しい $\hbar$ と c の巾をかけるには以下のようにする．質量に $c/\hbar$ をかけると長さの逆数に変換できる．d はそのままにしておくと，$(mcd^2)/\hbar$ は長さの単位をもつ．これを c で割ると時間の単位をもつ最終結果 $(md^2)/\hbar$ を得る．最終結果に出てくる質量，長さ，時間等は全て $\hbar$ や c を表したものと同じ単位系で表すことが重要である．先ほどの例では，このことは $\hbar$ が erg-secで表されているなら，質量はgm で表さなくてはならないことを意味している．もし $\hbar$ が eV-sec で表されており，質量が eV で表されているなら，先ほどと違って今度は，$(md^2)/(\hbar c^2)$ という形になる．このため，質量はしばしば eV/c^2 の単位であらわされる．

長さの単位を L と表すことにする．先ほど説明したように自然単位系での様々な物理量はこれを使って表すことができる．例えば，時間 $= L$ ，エネル

ギー $= L^{-1}$, 質量 $= L^{-1}$, 運動量 $= L^{-1}$, 角運動量 $= L^0$, 速度 $= L^0$, 力 $= L^{-2}$ といったように表すことができる.

電荷がある場合は, 有理ヘビサイド・ローレンツ (Heavyside–Lorentz) 単位 [1] を自然単位と組み合わせる. クーロンの法則を有理単位系で表すと,

$$F = \frac{e^2}{4\pi r^2} \tag{4.1}$$

となる. ただし e の単位はクーロンで表す. SI単位系で電子の電気量をあらわすと,

$$\frac{e^2}{4\pi} = 2.30 \times 10^{-28} \frac{\mathrm{kg\,m^3}}{\mathrm{s^2}} \tag{4.2}$$

となる. これを $\hbar c$ で割ると自然単位系での無次元定数,

$$\frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137.04} \tag{4.3}$$

に変換出来る.

電荷は無次元量であるという事実から, 電場$\mathbf{E}$および磁場$\mathbf{B}$は, 力が $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. となるためには$1/L^2$ の単位を持たなければならないことがわかる. ベクトルポテンシャルの定義, $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, とスカラーポテンシャルの定義, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\Phi$ から$\mathbf{A}$ と Φ が $1/L$ の単位を持つこともいえる.

例題 4.1: ニュートンの重力の法則,

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{4.4}$$

にあらわれる重力定数 G が自然単位系で $2.59 \times 10^{-66}\,\mathrm{cm}^2$ になることをしめせ.

4.2　統計力学

経路積分形式で書かれた量子力学的遷移振幅 [2, 3] と統計力学で出てくる量子力学的分配関数 [4] の間には深い関係がある. この関係を使うと, 熱的振舞いが量子力学的遷移振幅やプロパゲーターからわかる.

分配関数は熱平衡状態にある系で定義される．ゆえに，系のハミルトニアン H は時間に依存しないとする．ハミルトニアンはハイゼンベルク表示の固有状態 $|E_n\rangle$ の完全系を持つと仮定する．簡単のために固有状態を不連続なものに制限し，それらを区別する添字を整数 n とする．すると，分配関数は次で与えられる．

$$Z_\beta = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n \langle E_n| e^{-\beta H} |E_n\rangle = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} \ . \tag{4.5}$$

ただし，和は系の可能な全ての完全系について実行し，β は温度の逆数 $1/(kT)$ で，k はボルツマン (Boltzmann) 定数を表す．自然単位系では β は長さの単位を持つ．分配関数は観測可能量の熱的平均を定義するのに使用される．系の平均エネルギーは次で与えられる．

$$\langle E \rangle_\beta \equiv Z_\beta^{-1} \sum_n \langle E_n| H e^{-\beta H} |E_n\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_\beta \ . \tag{4.6}$$

ヘルムホルツ (Helmholtz) の自由エネルギー F_β は次で与えられる．

$$F_\beta = -\frac{1}{\beta} \ln Z_\beta \ . \tag{4.7}$$

系の体積を V とし，(4.7) を使うとエントロピー S および圧力 P は次式で定義される．

$$S = \beta^2 \frac{\partial F_\beta}{\partial \beta} \ \ , \ \ P = -\frac{\partial F_\beta}{\partial V} \ . \tag{4.8}$$

したがって，分配関数がわかれば系の熱的振舞いがすべてわかるのである．経路積分では計算を実行しやすいので，量子力学的遷移振幅と統計力学の分配関数とを関係づけると便利である．量子力学的遷移振幅の定義より，

$$Z_{ab} = \langle\, q_b, t_b \,|\, q_a, t_a \,\rangle = \langle q_b| e^{-iH(t_b - t_a)} |q_a\rangle \ . \tag{4.9}$$

ウィック回転，$t_b - t_a \ \to\ -i\beta$ ，をして $q_a = q_b$ とすると，

$$\bar{Z}_{aa} = \langle q_a| e^{-\beta H} |q_a\rangle \tag{4.10}$$

を得る．状態 $|q\rangle$ ，$|E_n\rangle$ が完全であると仮定すると，(4.10) を積分して次を得る．

$$\int dq_a\,\bar{Z}_{aa} = \int dq_a\,\langle q_a|\,e^{-\beta H}\,|q_a\rangle = \sum_n \langle E_n|\,e^{-\beta H}\,|E_n\rangle = Z_\beta\,. \tag{4.11}$$

最後に，(2.47) の経路積分で与えられている $\bar{Z}_{aa}$ を虚時間に接続したものを (4.11) に代入する．このとき，虚時間を表す変数 $\tau = it$ を導入し，q の τ での微分を $\dot{q}$ と表す．さらに簡単のために t_a をゼロにとるとその結果，

$$Z_\beta = \int dq_a \int_{q_a}^{q_a} \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\,\left[H(p,q) - ip\dot{q}\right]\right\} \tag{4.12}$$

を得る．ハミルトニアンが以下のような特別な場合，

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{4.13}$$

分配関数は次のようになる．

$$Z_\beta = \int dq_a \int_{q_a}^{q_a} \overline{\mathcal{D}}q\,\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\,\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)\right]\right\}\,. \tag{4.14}$$

ただし測度 $\overline{\mathcal{D}}q$ は (2.62) で定義されている．2.3 章で導入されたウィック回転を使って定義されているユークリッド時間の経路積分と (4.14) の関係は明らかだ．大変大雑把に言うと，ウィック回転した経路積分は同様の問題を統計力学の見方で表したものと同じくらいよい振舞いをしている．ユークリッドの経路積分と分配関数の関係からウィック回転が正当化できる．

(4.14) にあらわれる経路積分の形から q_a ではじまり q_a で終るような周期的な経路のみが分配関数に寄与し，その軌跡の周期は β になることがわかる．この事実より，久保・マーティン・シュウィンガー (Kubo–Martin–Schwinger, KMS) 条件 [5] つまり，特にウィック回転されたすべての観測可能量の期待値は周期 β を持つことが導きだされる．これは，以下で与えられるハイゼンベルク演算子 $O_H(t)$ の熱平均の定義より確かめることができる．

$$\langle\, O_H(t)\,\rangle_\beta = \sum_n \langle E_n|\,O_H(t)e^{-\beta H}\,|E_n\rangle\;. \tag{4.15}$$

ハイゼンベルク演算子の時間発展を表す(2.24)の結果より,

$$O_H(t-i\beta)=e^{-i(i\beta)H}O_H(t)e^{i(i\beta)H} \tag{4.16}$$

を得る. (4.16)を(4.15)に代入すると,

$$\begin{aligned}\langle O_H(t)\rangle_\beta &= \sum_n \langle E_n|\, e^{-\beta H}e^{-i(i\beta)H}O_H(t)e^{i(i\beta)H}\,|E_n\rangle \\ &= \sum_n \langle E_n|\, e^{-\beta H}O_H(t-i\beta)\,|E_n\rangle = \langle O_H(t-i\beta)\rangle_\beta \end{aligned} \tag{4.17}$$

を得る. したがって, 期待値が周期性を持つことをしめすことができた. 演算子それ自身が虚時間にウィック回転, $O_H(t)\to O_H(\tau)$ されるならば, (4.17)より,

$$\langle O_H(\tau)\rangle_\beta = \langle O_H(\tau+\beta)\rangle_\beta \tag{4.18}$$

を得る. 演算子の時間順序積の熱的平均にも同様の周期条件が存在する.

例題4.2: 経路積分を用いて表された分配関数(4.14)を使って(4.18)をしめせ.

自由エネルギー F_β を経路積分を用いて表すと,

$$F_\beta=-\frac{1}{\beta}\ln\int dq_a\int_{q_a}^{q_a}\mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\,\Big[H(p,q)-ip\dot{q}\Big]\right\} \tag{4.19}$$

となる. 例えば, 自由粒子に対して経路積分を評価した(3.4)の結果より, 次の無次元量を得ることができる.

$$F_\beta=-\frac{1}{\beta}\ln\left[\left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\int dq_a\right]\equiv-\frac{1}{\beta}\ln\left[\left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{\frac{1}{2}}V\right]. \tag{4.20}$$

(4.8)と(4.20)より理想気体の式 $PV=kT$ を簡単に得ることができる.

統計力学との関係から系の基底状態を計算する方法がわかる. (4.5)より $\beta\to\infty$ の極限で, H の最小固有値 E_g が分配関数に主な寄与を与える. このことは次のように書ける.

$$\lim_{\beta\to\infty}e^{\beta E_g}Z_\beta=1\,. \tag{4.21}$$

よって,

$$E_g = -\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}\ln Z_\beta \tag{4.22}$$

を得る. (4.22) の結果は, ユークリッド形式の経路積分から系の基底状態のエネルギーを得ることができることをしめしている.

これを3.2節の自明でない調和振動子について見てみる. (3.54) と (3.60) およびこの節で導いた処方より, 分配関数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} Z_\beta &= \int dq\left[\frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega\beta)}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left[-q^2\frac{m\omega}{\sinh(\omega\beta)}(\cosh(\omega\beta)-1)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\cosh(\omega\beta)-2}} = \frac{1}{2\sinh(\frac{1}{2}\omega\beta)}\,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

β が大きい極限で, (4.23) は次のように振舞う.

$$\lim_{\beta\to\infty} Z_\beta \approx e^{-\frac{1}{2}\beta\omega}\,. \tag{4.24}$$

よって, 一次元調和振動子でよく知られている結果 $E_g = \frac{1}{2}\omega$ が得られる.

ハイゼンベルク表示でみた位置演算子の時間順序積の熱的振舞いを解析するために, 外場 J を導入した経路積分表示の自由エネルギーを考える. これは虚時間を使って,

$$F_\beta[J] = -\frac{1}{\beta}\ln\int dq_a\int_{q_a}^{q_a}\mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\,\left[H(p,q)-ip\dot{q}-Jq\right]\right\} \tag{4.25}$$

と書かれる. このような系は熱平衡にないが, 外場項がゼロの極限で熱平衡が実現すると考えられる. それゆえ, 外場項は単に時間順序積を生成するために人為的に導入したものにすぎない. しかし, (4.25) は虚時間での時間順序積を与える生成汎関数である. 実時間での時間順序積を得るためには, 時間の変数を $\tau\to it$ と置き換えて, 実時間に戻さなくてはならない. (4.25) と 3.2 節で導入された生成汎関数 $Z_{ab}[J]$ との類似は明らかである.

例えば, 虚時間 τ での位置演算子の熱的平均は,

$$\langle\, Q(\tau)\,\rangle_\beta = -\beta\frac{\delta F_\beta[J]}{\delta J(\tau)} \equiv Q_\beta(\tau) \tag{4.26}$$

で与えられる. (4.26) の結果より, J の汎関数 $Q_\beta(\tau)$ が与えられる.

時間順序積の解析から興味ある結論が得られる. $\beta \to \infty$ の極限では, 基底状態が時間順序積の熱的平均に主要な寄与をする. よって次のように書ける.

$$\lim_{\beta\to\infty} e^{\beta E_g} \langle\, T\{Q(\tau_1)\cdots\}\,\rangle_\beta = \langle E_g|\, T\{Q(\tau_1)\cdots\}\,|E_g\rangle\ . \tag{4.27}$$

この事実より, ウィック回転された経路積分は, その周期を無限大にした経路全てについて積分すると, 基底状態間の時間順序積に対する生成子とみなすことができる.

> **例題 4.3**: (3.62) を使って調和振動子では次のようになっていることをしめせ.
>
> $$\lim_{\beta\to\infty} \langle\, Q^2\,\rangle_\beta = \frac{1}{2m\omega} e^{-\frac{1}{2}\beta\omega}\ . \tag{4.28}$$
>
> ただし Q は $t=0$ でのハイゼンベルク演算子である.

(4.25) で定義された生成汎関数の一つの重要な拡張がある. **有効作用** (effective action) と呼ばれる生成汎関数 $\Gamma_\beta[Q_\beta]$ をルジャンドル変換を使って次のように定義する.

$$\Gamma_\beta[Q_\beta] = F_\beta[J] + \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau\, J(\tau) Q_\beta(\tau)\ . \tag{4.29}$$

(4.29) に連鎖微分則を適用すると,

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma_\beta[Q_\beta]}{\delta Q_\beta(\tau)} &= \int_0^\beta d\tau'\, \frac{\delta F_\beta[J]}{\delta J(\tau')}\frac{\delta J(\tau')}{\delta Q_\beta(\tau)} \\ &\quad + \frac{1}{\beta}J(\tau) + \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau'\, \frac{\delta J(\tau')}{\delta Q_\beta(\tau)} Q_\beta(\tau')\end{aligned} \tag{4.30}$$

を得る. (4.26) の定義を使うと (4.30) は次のようになる.

$$\frac{\delta\Gamma_\beta[Q_\beta]}{\delta Q_\beta(\tau)} = \frac{1}{\beta}J(\tau)\ . \tag{4.31}$$

$J \to 0$ の極限で有効作用は平衡系の自由エネルギーになる. (4.31) の結果より, この自由エネルギーは系が平衡になる位置の汎関数となっており, 次式を

満たす.

$$\left.\frac{\delta\Gamma_\beta[Q_\beta]}{\delta Q_\beta(\tau)}\right|_{J=0} = 0\ . \tag{4.32}$$

(4.32) より, 位置の期待値は平衡系 ($J=0$) の自由エネルギーを停留させる. ここで再び (4.27) に注目すると, $\beta\to\infty$ の極限で, 係数 $e^{-\beta E_g}$ 以外は, Q_β は系の基底状態に対する位置の期待値に一致している. ゆえに, 有効作用の停留値や自由エネルギーは量子系の基底状態（複素数の場合もある）の性質と深い関係がある.

$J\neq 0$ の有効作用に話を戻す. (4.31) より,

$$\frac{\delta^2\Gamma_\beta[Q_\beta]}{\delta Q_\beta(\tau)\,\delta Q_\beta(\tau_1)} = \frac{1}{\beta}\frac{\delta J(\tau_1)}{\delta Q_\beta(\tau)} \equiv P_\beta(\tau_1,\tau) \tag{4.33}$$

を得る. (4.26) より,

$$\frac{\delta Q_\beta(\tau)}{\delta J(\tau_2)} = \langle T\{Q(\tau)Q(\tau_2)\}\rangle_\beta \equiv G_\beta(\tau,\tau_2) \tag{4.34}$$

を得る. ただし, 虚時間の時間順序積は,

$$T\{Q(\tau_1)Q(\tau_2)\} = \theta(\tau_1-\tau_2)Q(\tau_1)Q(\tau_2) + \theta(\tau_2-\tau_1)Q(\tau_2)Q(\tau_1) \tag{4.35}$$

で与えられる. (4.33) と (4.34) は次のようにデルタ関数で結びついている.

$$\begin{aligned}\int_0^\beta d\tau\, P_\beta(\tau_1,\tau)G_\beta(\tau,\tau_2) &= \int_0^\beta d\tau\,\frac{\delta J(\tau_1)}{\delta Q_\beta(\tau)}\frac{\delta Q_\beta(\tau)}{\delta J(\tau_2)} \\ &= \frac{\delta J(\tau_1)}{\delta J(\tau_2)} = \delta(\tau_1-\tau_2)\ . \end{aligned}\tag{4.36}$$

$P_\beta(\tau,\tau')$ は (1.74) の意味で $G_\beta(\tau,\tau')$ の逆汎関数である. Γ_β の高階微分は興味深い性質を持っている. しかしこの解析は 8 章でこの節での考え方を場の理論に拡張するまでおいておくことにする. ただし, 4.5 節で量子力学系の自発的対称性の破れを考える時に有効作用を評価する.

4.3　対称性と生成汎関数

対称性の概念は量子過程の理解において中心的役割を果たしており，その重要性はいくら強調しても足りないくらいだ．物理は物質の分類と，それらが従う力学法則の発見という二つの営みによって進歩してきた．これらは素粒子論，場の理論では対称性を通じて絡まりあっている．これまでの議論では，作用の形は古典力学でなじみ深い系から受け継いだものだった．対称性とその量子的なダイナミクスとの関係は，粒子を分類したり，ダイナミクスを記述する作用を構成するのに強力な道具になる．系の対称性は生成汎関数の経路積分形式でみると最もよくわかる．この節では量子力学系の対称性を古典的および量子的な観点から述べる．

物理学における対称性は各々それに対応して保存則や保存量を持つ．これは古典的にはオイラー・ラグランジュ方程式から簡単にわかる．ラグランジアン密度が，

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \tag{4.37}$$

を満たすなら，作用は座標 q_j に対して**サイクリック**であるという．正準運動量の定義(1.42)を使うとオイラー・ラグランジュ方程式より，

$$\frac{dp_j}{dt} = 0 \tag{4.38}$$

がなりたち，運動量が保存される．(4.37)とラグランジアン密度が持つ以下の特徴は同等だ．すなわち，ラグランジアンの座標変数 q_j を時間に依存しない定数 c_j だけ平衡移動してもラグランジアンは次のように不変である．

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j) = \mathcal{L}(q_j + c_j, \dot{q}_j)\ . \tag{4.39}$$

(4.39)の性質は作用の**並進対称性**(translational invariance)と呼ばれており，この対称性から(4.38)の保存則が導かれる．

この**簡単**な例との類似から古典系における対称性は, 座標変数の変分あるいは**変換**に対する作用の不変性と理解できる [7]. しばらくの間, **連続**な変換のみ考える. 変換が連続ならば, 座標変数を変えない恒等変換に常になめらかにつながる. 変換が連続であるので無限小変換を考える. 無限小変換を連続して行なえば有限な変換になるので無限小変換だけを考えれば十分である. q_j の無限小変換を $q_j \to q_j + \delta q_j$ と書く. ただし, δq_j は $(\delta q_j)^2 \approx 0$ を満たす任意の t の関数である. この変換に対する作用の変分は,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right] \end{aligned} \tag{4.40}$$

となる. (4.40) は特別に新しいことを言っているわけではなく, 単なる言い換えにすぎない. しかしながら, もし δS を**元の**オイラー・ラグランジュ方程式を満たす古典解 q_c 上で計算するならば, 次のようになる.

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} dt \, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) \Bigg|_{q=q_c} . \tag{4.41}$$

$t = t_a$ および $t = t_b$ で $\delta q_j = 0$ ならば$\delta S = 0$ となり, 単にオイラー・ラグランジュ方程式を再現することになる. しかし, もし端点で $\delta q_j \neq 0$ **かつ** $\delta S = 0$ ならば(4.41) は,

$$\frac{dG}{dt} = 0 \tag{4.42}$$

となる. ただし,

$$G = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Bigg|_{q=q_c} \tag{4.43}$$

である. つまり, 上で述べた自明でない変分で $\delta S = 0$ となるなら, この変換に対して作用は**対称的**であると言い, (4.43) で与えられる G を対称性にともなう**チャージ** (charge) という. チャージは (4.42) より保存されることがわかる.

(4.41) の結果は次のような逆の見方ができる. もし作用が変換に対して不

変で**ない**ならば δS はゼロにならない. このとき, δS は一般に,

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} dt\, F(t) \tag{4.44}$$

と書けて, (4.41) より,

$$\frac{dG}{dt} = F(t) \tag{4.45}$$

がなりたつ. これで変換にともなうチャージ G を定義できる. ただし チャージ は保存されない.

座標の変換で系の持つ対称性のすべてが尽くされているわけではない. 作用にあらわれる積分の範囲を取り替えることも可能である.

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L} \;\rightarrow\; S' = \int_{t_a+\delta t}^{t_b+\delta t} dt\, \mathcal{L}\,. \tag{4.46}$$

例題 4.4: もし作用が (4.46) の変換の下で不変ならば, 古典的軌跡上のハミルトニアンは保存されることをしめせ.

明らかに, 最も一般的な変換は座標と積分範囲の両方の変換を含んでいる. そのような変換は場の理論ではより重要な意味を持つ.

古典力学系の持つ重要な性質の一つに, ラグランジアン密度に以下のように正準変数で書かれた関数 F の時間微分を付け加えてもよいという自由度がある.

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{dF}{dt} \;\Rightarrow\; S \rightarrow S + F(t_b) - F(t_a)\,. \tag{4.47}$$

古典的なレベルでは, (4.47) は今考えている時間間隔で系のダイナミクスに影響を与えない. なぜならこの時間間隔で F は S の変分に影響を与えることができないからだ. このような性質のために, (4.47) は**正準変換** (canonical transformation) を定義する目的で古典力学で詳しく研究されてきた. 正準変換では理論のポアッソン括弧の構造が不変に保たれるのである [6]. これはヤコビアンが 1 であるような p と q の変換のみを考えていることと同等である. ゆえに位相空間の体積は正準変換で不変である.

量子力学系では量子化の過程に基づくヒルベルト空間の構造のために議論が複雑になる [8]. 量子力学的な対称変換は系の状態がユニタリーあるいは反ユニタリーな変換を受けるだけでなく, 状態にかかる演算子も変換を受ける場合がある. 例えば, 量子力学系では作用の中に時間微分項があると系の状態は自明でない変換性をもつのである. ゆえに**量子的対称性**は物理的意味のある遷移要素を不変にするような演算子および状態の変換の集合で定義される. ある遷移要素はそれによって全体にかかる位相分だけ変わるかもしれないが, これは物理的に意味のある状態の変換をあらわしている. 位相を含んだ議論は, この節の終りでゲージ変換を導入したときに行なう.

経路積分では, 古典的対称性とその量子版との関係は明白だ. 系の古典的な面は, 指数関数になっている作用の部分より明らかである. 量子力学的な構造は経路積分を実行する際の測度に含まれている. 初期および終状態は積分の境界にあらわれる. 経路積分を詳しくみると, ある変換に対して作用が不変であるだけでは遷移振幅が不変であると言うには不十分であることがわかる. なぜなら, それだけでは測度に含まれるヤコビアンに自明でない部分が出てきてしまうからである. もしヤコビアンにそのような部分が出てくるならば古典的対称性は量子化の過程で破れ, このとき理論が**アノマリー** (anomaly) を持つと言う. アノマリーはでてくる方が好ましいときもあるし, そうでないときもあり, それはその時々に応じて決められることである.

例えば, 次で与えられる古典的ラグランジアン,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\omega}\frac{\dot{q}^2}{q^2} \tag{4.48}$$

は時間に依存しないようなスケール変換 $q \to e^{\lambda}q$ に対して不変である. (4.48) の作用をそのまま (2.52) の測度を持つ (2.50) の経路積分の式に代入すると正しく系をあらわさなくなる. なぜなら測度 (2.50) はスケール不変性を持たないからだ. (4.48) の作用をスケール不変性を破らないように量子化するならば, 経路積分の測度は (2.52) と異なる. 適切な測度を得ることを例題にしておく.

> **例題4.5**: 作用(4.48)から, (2.48)に相当する作用を得よ. また, p のスケール変換を決定せよ. そして, (2.47)の経路積分の形から(2.50)に対応する経路積分を構成し, スケール不変性を持つことを確かめよ[9].

測度の構造から多くの量子力学的性質が明らかになる. 例えばもし(2.50)の経路積分の境界が $\pm\infty$ ならば, エーレンフェストの定理を証明できる. エーレンフェストの定理によると観測可能量の期待値は古典的なハミルトンの運動方程式に従う. 経路積分を使ってこの定理を証明するには, 積分の各変数を $q_j \to q_j + f_j$ のように平行移動すればよい. 積分の境界が $\pm\infty$ なので, 新しい変数で書いても経路積分の結果が変わらないことは明らかだ. N の大きい極限で, この変数の取り替えは, 作用にあらわれる $q(t)$ を時刻 t_b および t_a でゼロになる関数 $f(t)$ の分だけ平行移動したことに等しい. $f(t)$ が端点でゼロであることより, 部分積分したときに表面項はゼロになる. $f(t)$ は任意なので無限小にとってもよい. すると $[f(t)]^2 \approx 0$ となるので, 最終的に次のようになる.

$$\int_{q_a}^{q_b} \overline{\mathcal{D}}q \exp\left[i\int_{t_a}^{t_b} dt\,\mathcal{L}(q,\dot{q})\right]$$
$$= \int_{q_a}^{q_b} \overline{\mathcal{D}}q \exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b} dt\left[\mathcal{L}(q,\dot{q}) + f(t)\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\right]\right\}. \tag{4.49}$$

$f(t) = \epsilon\delta(t-t')$ ととると (4.49) は次のようになる.

$$\int_{q_a}^{q_b} \overline{\mathcal{D}}q \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\bigg|_{t=t'} \exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b} dt\,[\mathcal{L}(q,\dot{q})]\right\} = 0\,. \tag{4.50}$$

ただし $\epsilon^2 \approx 0$ および t' は任意である.

対称性という考え方から生じる別の重要な現象がある. 対称性を保つように摂動級数を形式的に書き下すことにより非線形な, つまり二次形式ではない理論を量子化できる. しかしながら, 相互作用の非線形性のために, 系の真の基底状態が対称性を破るようなものになってしまうことがある. これを**自発的対称性の破れ** (spontaneous breakdown of symmetry) と呼び, これは

特に素粒子論および物性理論といった物理の様々な分野での中心的アイデアの一つになっている．一般的に言って，非線形量子系での基底状態の性質を決めることは困難である．しかし，経路積分はそれに対して重要な役割を果たした．これについては4.5節で簡単な量子力学系を使ってもう一度議論する．

量子的対称性の存在により遷移要素や時間順序積をすぐさま分類できる．経路積分では，この分類は生成汎関数が満たすべき恒等式の組であらわされる[10]．このことをしめすために，回転不変性について調べる．まずはじめに，回転の一般的な性質について復習する．

任意のベクトルのノルムは回転によって保存されるので，回転をあらわす変換は座標に対して線形である．このような変換の最も一般的な形は $x'_j = R_{jk}x_k$ とあらわすことができる．ただし R_{jk} は行列 $\mathbf{R}$ の成分である．ノルムの不変性より，

$$x'_i x'_i = R_{ij}R_{ik}x_j x_k = x_k x_k \;\Rightarrow\; R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk} \tag{4.51}$$

がなりたつ．ゆえに $\mathbf{R}$ は直交行列である．無限小変換は $R_{jk} \approx \delta_{jk} + \delta R_{jk}$ のように単位元の周りでの展開で得られる．$\mathbf{R}$ が直交行列であることより，

$$\delta_{jk} \approx (\delta_{ij} + \delta R_{ij})\,(\delta_{ik} + \delta R_{ik}) \approx \delta_{jk} + \delta R_{kj} + \delta R_{jk} \tag{4.52}$$

となることがすぐにわかる．これにより，無限小変換 δR_{jk} は反対称行列であることがわかる．ゆえに無限小回転をあらわす 3×3 反対称行列は独立変数を3つしか持たない．この成分が3つの独立した回転角 $\delta\theta_j$ に相当する．よって行列 δR_{jk} は $\delta R_{jk} = \delta\theta_i \varepsilon_{ijk}$ と書ける．ただし，δR_{jk} を反対称行列にするために(1.54)のレビ・チビタの記号を使った．デカルト座標に無限小変換をほどこすと，

$$x_j \to x_j + \delta R_{jk}x_k \tag{4.53}$$

となる．その逆変換は，

$$x_j \to x_j + \delta R_{kj}x_k = x_j - \delta R_{jk}x_k \tag{4.54}$$

となる．

束縛状態を持つポテンシャルと時間に依存する外場を持つ3次元空間での質点の遷移振幅の経路積分表示はデカルト座標を使って,

$$Z_{ab}[J] = \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \overline{\mathcal{D}}x \exp\left\{ i\int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2}m\dot{x}_j\dot{x}_j - V(r) - J_j x_j \right] \right\} \tag{4.55}$$

と書ける. (2.52) と同様, 測度は,

$$\overline{\mathcal{D}}x = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon} \right)^{3N/2} \prod_{k=1}^{N-1} d^3x_k \tag{4.56}$$

で与えられる. ただし, 添字 k は時間をあらわしている. 以下では簡単のために $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b = 0$, すなわち原点から原点への遷移 $Z_{00}[J]$ という特別な場合を考える.

測度も作用も回転不変なので経路積分 $Z_{00}[J=0]$ は座標の回転で不変である. 回転によって,

$$Z_{00}[J=0] \to \int_0^0 \overline{\mathcal{D}}x' \exp\left\{ i\int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2}m\dot{x}'_j\dot{x}'_j - V'(r') \right] \right\}$$

$$= \int_0^0 \overline{\mathcal{D}}x \exp\left\{ i\int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2}m\dot{x}_j\dot{x}_j - V(r) \right] \right\} = Z_{00}[J=0] \tag{4.57}$$

となる. ただし V および 原点 $\mathbf{x}=0$ が回転不変であることを使った. $J \neq 0$ の場合, $J_j \to J_j + \delta R_{jk}J_k$ で与えられる外場の無限小変換は, 積分変数の逆変換 $x_j \to x_j - \delta R_{jk}x_k$ で打ち消される. つまり $O(\delta R)$ で $J'_jx'_j = J_jx_j$ である. よって, $J \neq 0$ の遷移要素は, 次のように外場の回転に対して不変である.

$$Z_{00}[J] = Z_{00}[J']\,. \tag{4.58}$$

(1.28) の汎関数のテイラー展開の手法をこの無限小の場合にあてはめると (4.58) は,

$$Z_{00}[J'] - Z_{00}[J] = 0 = \delta\theta_i \int dt\, \varepsilon_{ijk} J_k(t) \frac{\delta Z_{00}[J]}{\delta J_j(t)} \tag{4.59}$$

となる. $\delta\theta_i$ は任意で $J \neq 0$ なので, (4.59) の結果は時間順序積の間の関係をあらわす生成子の役割をする. 例えば, (4.59) を一回 J_k で汎関数微分すると,

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\delta Z_{00}[J]}{\delta J_j(t_1)} + \varepsilon_{ijl} \int dt\, J_l(t) \frac{\delta^2 Z_{00}[J]}{\delta J_k(t_1)\,\delta J_j(t)} = 0 \tag{4.60}$$

となる. (4.60) の関係式は異なる時間順序積の間の関係をあらわす. ただし, $\mathbf{x}=0$ という特殊な状態間で計算したときに限った. 同様にして, 初期および終状態で x がゼロでない場合についてもより複雑ではあるが恒等式を導くことができる. これを例題にしておく.

例題 4.6: 遷移振幅の一般形 (4.55) は次の恒等式を満たすことをしめせ.

$$\varepsilon_{ijk}\int dt\, J_k(t)\frac{\delta Z_{ab}[J]}{\delta J_j(t)}+\varepsilon_{ijk}\left(x_k^a\frac{\partial}{\partial x_j^a}+x_k^b\frac{\partial}{\partial x_j^b}\right)Z_{ab}[J]=0\ . \tag{4.61}$$

量子力学の持つ対称性の他の例として, 任意の電磁ポテンシャル中を運動する荷電粒子を考える. この系のラグランジアン密度は, デカルト座標を使って,

$$\mathcal{L}(x,\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}_j\dot{x}_j-V(x)-e\phi(x)+eA^j(x)\dot{x}^j \tag{4.62}$$

とあらわされる [6]. ただし, ϕ はスカラーポテンシャルで $\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャルをあらわす. 電磁ポテンシャルは, それを含む運動方程式が以下で定義される**第二種ゲージ変換**[1] (gauge transformation of the second kind) で不変になるように定義される.

$$A^j\to A^j+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^j}\ ,\ \ \phi\to\phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\ . \tag{4.63}$$

ただし Λ は任意関数である. 連鎖微分則を使うと, 第二種ゲージ変換で (4.62) は Λ の時間に関する全微分だけずれることがわかる. ゆえに作用は次のように変化する.

$$S\ \to\ S+e\Lambda(x_b,t_b)-e\Lambda(x_a,t_a)\ . \tag{4.64}$$

したがって, 古典的には粒子の運動方程式はゲージ変換で変化しない. しかし, 量子力学的遷移要素は不変でない. 経路積分の形は次のように変化する.

$$Z_{ab}\to e^{ie\Lambda(x_b,t_b)}Z_{ab}e^{-ie\Lambda(x_a,t_a)}\ . \tag{4.65}$$

これによると, 遷移要素はゲージ変換で全体にかかる位相分だけずれることがわかる. このような可能性については前節ですでに述べている. プロパゲー

[1]第一種ゲージ変換は 6 章で定義する.

ターにあらわれるこの位相のずれを打ち消し, 量子力学的遷移振幅を第二種ゲージ変換で不変にするためには, 荷電粒子の波動関数をゲージ変換によって同時に次のように変換すればよい.

$$\langle x \,|\, \psi, t \rangle \rightarrow e^{ie\Lambda(x,t)} \langle x \,|\, \psi, t \rangle \,. \tag{4.66}$$

(4.66) の処方を使えば, (2.31) の遷移要素は不変である.

最後に, (4.43) で定義されるチャージ G の量子力学型について調べる. 正準運動量の定義を使うと, チャージ G は次のように量子力学の演算子になる.

$$G = P_j \, \delta Q_j \,. \tag{4.67}$$

$[\delta Q_j, Q_k] = 0$ を仮定すると,

$$-\,i[Q_k, G] = \delta Q_k \tag{4.68}$$

となる. ゆえに量子力学系では, チャージ G は座標の無限小変換を**生成する**. このために G は対称性の**生成子** (generator) と呼ばれている. もし G が保存するならば, 系のハミルトニアンと交換する. ゆえに G はエネルギーのような観測可能量と同種のものと考えることができる. 一つの対称性が一つ以上の生成子と関係していることもある. さきほど議論した 3 次元回転には, 次の 3 つの生成子がある.

$$G_j = \varepsilon_{jkm} Q_k P_m \,. \tag{4.69}$$

そしてそれらの生成子は**代数** (algebra) を形成している [11]. 代数とは大雑把に言って, ある一定の規則で掛けたり, 足したりするような要素の集合のことである. (4.69) の生成子はなじみ深い角運動量の交換関係,

$$[G_j, G_k] = i\varepsilon_{jkm} G_m \tag{4.70}$$

を満たしていることは簡単にしめすことができる. (4.70) は**リー代数** (Lie algebra) の例である. 詳しくは 7 章で議論する.

4.4　調和振動子のコヒーレント状態

この節では簡単な調和振動子について考え，コヒーレント状態間の遷移振幅に対する経路積分表示を導く．特にこれにより基底状態間の遷移振幅，つまり**真空間の遷移振幅汎関数** (vacuum persistence functional) を得る．その過程で生成，消滅演算子を使って調和振動子を書き換える．そしてそれをさらにもう少し書き換えれば正準量子化した場の理論が自然に得られる．

まずディラックによって与えられた以下の定義を用いて調和振動子のハミルトニアン $H = P^2/2m + \frac{1}{2}m\omega^2Q^2$ を書き換える．

$$a = (\tfrac{1}{2}m\omega)^{\frac{1}{2}}\left[Q + \frac{iP}{m\omega}\right]$$

$$a^\dagger = (\tfrac{1}{2}m\omega)^{\frac{1}{2}}\left[Q - \frac{iP}{m\omega}\right] . \tag{4.71}$$

上の定義より，

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{4.72}$$

$$H = \omega a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\omega \tag{4.73}$$

$$[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger \tag{4.74}$$

$$[H, a] = -\omega a \tag{4.75}$$

がなりたつ．

例題 4.7: 関係式 (4.72) から (4.75) を確かめよ．

基底状態すなわち**真空** (vacuum) $|0\rangle$ は，

$$a\,|0\rangle = 0 \tag{4.76}$$

を満たすものとして定義する．言い換えると，真空とは演算子 a によって消されるものであり，ゆえに a は**消滅演算子** (annihilation operator) と呼ばれている．

例題 4.8: 状態 $|0\rangle$ が存在しなければならないことを証明せよ.

基底状態は H の固有状態で, $H|0\rangle = \frac{1}{2}\omega|0\rangle$ がなりたつ. 状態 $|1\rangle$ は $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ と定義される. これもまた次のように H の固有状態である.

$$H|1\rangle = [H, a^\dagger]|0\rangle + a^\dagger H|0\rangle = \omega a^\dagger|0\rangle + \tfrac{1}{2}\omega a^\dagger|0\rangle = \tfrac{3}{2}\omega|1\rangle \ . \tag{4.77}$$

$|1\rangle$ はエネルギー状態が ω を単位として一つだけ高いので, $a^\dagger$ は**生成演算子** (creation operator) と呼ばれている.

例題 4.9: 状態 $|n\rangle = (n!)^{-\frac{1}{2}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ は,

$$H|n\rangle = (n+\tfrac{1}{2})\omega|n\rangle \tag{4.78}$$

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \tag{4.79}$$

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle \tag{4.80}$$

を満たしていることをしめせ.

(4.80) から, $N = a^\dagger a$ は状態 $|n\rangle$ の ω の数を数えていることがわかる. したがって, これを**個数演算子** (number operator) と呼ぶ.

複素数 λ を使ってコヒーレント状態 $|\lambda\rangle$ は次のように定義される [12].

$$|\lambda\rangle = e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a}|0\rangle \ . \tag{4.81}$$

コヒーレント状態は多くの役に立つ性質をそなえている. それらのいくつかは次のようなものである.

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle e^{-\frac{1}{2}\lambda^*\lambda} \tag{4.82}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\lambda^* d\lambda\, |\lambda\rangle\langle\lambda| = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \tag{4.83}$$

$$\langle\sigma|\lambda\rangle = \exp(-\tfrac{1}{2}\sigma^*\sigma - \tfrac{1}{2}\lambda^*\lambda + \sigma^*\lambda) \tag{4.84}$$

$$\langle\sigma|a^\dagger|\lambda\rangle = \sigma^*\langle\sigma|\lambda\rangle \tag{4.85}$$

$$\langle\sigma|N|\lambda\rangle = \sigma^*\lambda\langle\sigma|\lambda\rangle \ . \tag{4.86}$$

例題4.10: ベーカー・キャンベル・ハウスドルフの公式 (1.66) を使い, (4.82) から (4.86) を確かめよ.

コヒーレント状態は H , Q および P の固有状態ではない. コヒーレント状態は Q と P の両方に対して同時によく定義されたゼロでない期待値を持つことができるので, コヒーレント状態の一般形は純粋な座標の固有状態と運動量固有状態の中間のようなものになっている. この重要な性質のために, コヒーレント状態をより複雑な場の理論に適用することが可能になる. コヒーレント状態間の遷移振幅は, 位置と運動量の期待値を両方議論できるという意味で, よりうまく古典的性質を持つ状態間の量子過程を記述する. 経路積分では量子力学と古典力学のつながりを保ち続けようとしているので, コヒーレント状態間の遷移振幅を構成し, それを調べることはごく当然である.

(4.83) より, コヒーレント状態は完全であり, この性質のおかげで初期および終状態間の経路積分表示 $Z_{ab} = \langle\, \lambda_b, t_b \,|\, \lambda_a, t_a \,\rangle$ を構成することが可能になる. ただし,

$$|\lambda, t\rangle \;\equiv\; e^{iHt}\,|\lambda, t=0\rangle \tag{4.87}$$

である. 2.2節で使った時間を間隔 ϵ の $N-1$ 個の部分に分割し, そこにコヒーレント状態の完全系を挿入するという手法を再び適用して計算する [13]. その結果,

$$Z_{ab} = \int \mathcal{D}\lambda \prod_{j=0}^{N-1} \langle\, \lambda_{j+1}, t_{j+1} \,|\, \lambda_j, t_j \,\rangle \tag{4.88}$$

となる. ただし(4.88)の測度は,

$$\mathcal{D}\lambda = \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2\pi i} d\lambda_j^*\, d\lambda_j \tag{4.89}$$

で与えられ, $\lambda_N = \lambda_b$, $\lambda_0 = \lambda_a$ とした.

(4.88) の各々の無限小要素は,

$$\langle\, \lambda_{j+1}, t_{j+1} \,|\, \lambda_j, t_j \,\rangle$$

$$\approx \exp(-i\epsilon\,\omega\lambda_{j+1}^*\lambda_j)\exp(-\tfrac{1}{2}\lambda_{j+1}^*\lambda_{j+1} - \tfrac{1}{2}\lambda_j^*\lambda_j + \lambda_{j+1}^*\lambda_j) \tag{4.90}$$

のように評価できる. (4.90) を (4.88) にあてはめると,

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= e^{-\frac{1}{2}(\lambda_b^*\lambda_b - \lambda_a^*\lambda_a)} \\ &\times \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \mathcal{D}\lambda \,\exp\left\{ i\sum_{j=0}^{N-1}\Big[-i\lambda_{j+1}^*\lambda_j + i\lambda_j^*\lambda_j - \epsilon\,\omega\lambda_j^*\lambda_j\Big]\right\} \end{aligned} \tag{4.91}$$

を得る. 連続極限 $\lambda_{j+1} \approx \lambda_j + \epsilon\dot{\lambda}_j$ をとり, 境界条件を考慮しながら部分積分すると,

$$Z_{ab} = e^{\frac{1}{2}(\lambda_b^*\lambda_b - \lambda_a^*\lambda_a)} \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \mathcal{D}\lambda \,\exp\left\{ i\int_{t_a}^{t_b} dt\,\left[i\lambda^*\dot{\lambda} - \omega\lambda^*\lambda\right]\right\} \tag{4.92}$$

を得る. $\lambda_a = \lambda_b = 0$ のとき二つのコヒーレント状態は $|0\rangle$ になるので (4.92) は真空の生成汎関数になる.

(4.92) の結果は (2.47) の形とは少し異なっているようにみえるが, 少し変形すれば同じ形になる. はじめに, 全体にかかっている係数 $\exp[\frac{1}{2}(\lambda_b^*\lambda_b - \lambda_a^*\lambda_a)]$ は, 積分の範囲を次のようにうまくとると経路積分に吸収できる.

$$\tfrac{1}{2}(\lambda_b^*\lambda_b - \lambda_a^*\lambda_a) = \int_{t_a}^{t_b} dt\,\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\lambda^*\lambda)\,. \tag{4.93}$$

その結果,

$$Z_{ab} = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \mathcal{D}\lambda \,\exp\left\{ i\int_{t_a}^{t_b} dt\,\left[i\tfrac{1}{2}\lambda^*\dot{\lambda} - i\tfrac{1}{2}\dot{\lambda}^*\lambda - \omega\lambda^*\lambda\right]\right\} \tag{4.94}$$

のようになる. 次のように変数変換すると,

$$\lambda = \left(\tfrac{1}{2}m\omega\right)^{\frac{1}{2}}\left[q + \frac{ip}{m\omega}\right] \tag{4.95}$$

これの複素共役も使って, 経路積分は,

$$\begin{aligned} &Z_{ab} = \\ &\int_{q_a,p_a}^{q_b,p_b} \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,\exp\left\{ i\int_{t_a}^{t_b} dt\,\left[\tfrac{1}{2}p\dot{q} - \tfrac{1}{2}q\dot{p} - \frac{p^2}{2m} - \tfrac{1}{2}m\omega^2q^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.96}$$

となる．ただし測度は，

$$\mathcal{D}p\,\mathcal{D}q = \prod_{j=1}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi}\,dq_j \tag{4.97}$$

で与えられる．

> **例題 4.11**: (4.96) を確かめよ．

この (4.96) にあらわれる作用は部分積分すれば (2.47) にあらわれる作用に一致する．測度は，初期の dp_0 積分がないぶんだけ少し (2.48) とは異なる．しかし，このために dp と dq の個数が一致して，この測度が明白に正準変換で不変になる．部分積分すると，通常の作用が出てくるが，q と p の境界条件のために表面項を捨てることができない．(4.96) の経路積分では粒子の運動についてのより複雑な境界条件が扱えるかわりに，余分な因子もでる．

$$Z_{ab} = e^{i\frac{1}{2}(p_a q_a - p_b q_b)} \int_{q_a,p_a}^{q_b,p_b} \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,\exp\left\{ i\int_{t_a}^{t_b} dt\,\mathcal{L}(p,q)\right\}\,. \tag{4.98}$$

> **例題 4.12**: (4.92) にあらわれる作用に $J^*\lambda + J\lambda^*$ という複雑な形の外場項をつけ加え，生成汎関数を (1.86) および (1.110) の連続版を使って計算せよ．ヒント：階段関数 $\theta(t-t')$ を使って演算子$\partial/\partial t$ の逆をとれ．

4.5　自発的対称性の破れ

この節では，簡単な量子力学系を使って自発的対称性の破れについて解析する．9 章で場の理論に対してこの節での手法を発展させる．この節で得られた結果は，標準理論において対称性の破れや質量の起源を説明する際の考え方の多くに関係している．

非線型なポテンシャル，

$$V(q) = -\tfrac{1}{2}\alpha q^2 + \tfrac{1}{4}\gamma q^4\,,\quad \alpha,\gamma > 0 \tag{4.99}$$

を持つ一次元系を考える．図4.1をみればわかるように，このポテンシャルは最小値をとる場所が二つある．その場所は，$q_m = \pm\sqrt{\alpha/\gamma}$ である．エネルギーの議論からポテンシャル(4.99)中の粒子の古典的な運動を定性的に考えることができる．粒子の持つ全ての力学的エネルギーの和が正ならば粒子は原点に対して対称的に振動する．しかし全エネルギーが $0 > E \geq -\alpha^2/4\gamma$ ならば，粒子は二つの井戸のうちのどちらかに落ち込み原点に対して対称的で**ない**振動をするようになる．ポテンシャルは $V(q) = V(-q)$ のような対称性を持つのに，運動する範囲が対称的でないような古典的な振動をするエネルギーの範囲が存在する．エネルギーが十分に小さければ井戸の底は二次で近似でき，古典的な小さい振動は調和振動子的な性質になる．

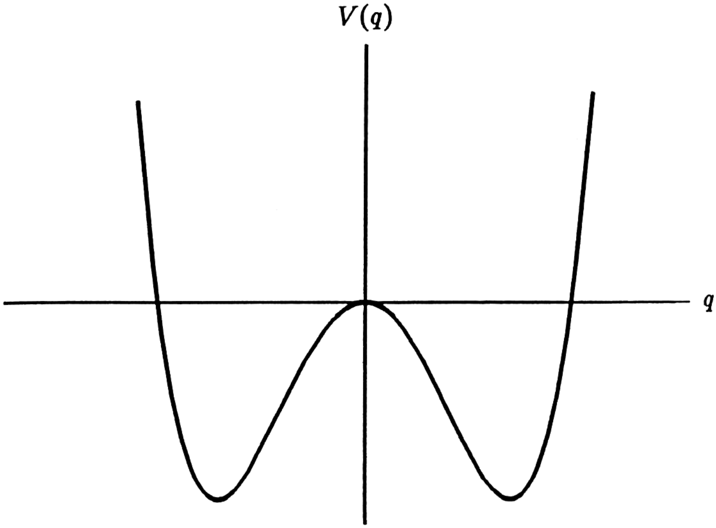


図4.1 ポテンシャル $V(q) = -\frac{1}{2}\alpha q^2 + \frac{1}{4}\lambda q^4$.

いま述べた基本的な古典的振舞いは量子力学でも大体同じだが，もっと微妙な点もある．実際，(4.99)のポテンシャルには二つの縮退した基底状態が存在する．その一方はそこでの低いエネルギーの振動が左の井戸の底での振動になっていて，もう一方はそこでの低いエネルギーの振動が右の井戸の底で

の振動になっている．古典力学のときとの類似から，振動にともなうエネルギー状態のうちの低い順位のものは調和振動子のもので近似できると思われる．この近似した調和振動子の振動数はこの模型を場の理論へ拡張したときの質量に相当するものである．このことは，9 章で議論する．

二つの近似的な調和振動子の基底状態，すなわち真空が存在しているということをしめすには次の自由エネルギーの経路積分型を使うのが一番よい．

$$F_\beta = -\frac{1}{\beta}\ln\int dx \int_x^x \overline{\mathcal{D}}q\, \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\, \left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)\right]\right\}\,. \tag{4.100}$$

$V(q)$ が非線形であるので (4.100) を正確に計算することは不可能である．しかし，非線形性をある程度まで取り扱い基底状態が二つ存在するということをしめすことは可能だ．これは，他の系にも応用できるような一般的な方法になっている．

しばらくの間は一般的なポテンシャル $V(q)$ で考え，のちほど (4.99) のような特殊なときについて考える．次の (4.100) を書き換えた形から出発する．

$$F_\beta = -\frac{1}{\beta}\ln\int dx\, P_\beta(x)\,. \tag{4.101}$$

ただし $P_\beta(x)$ は (4.100) にあらわれるユークリッド経路積分での確率密度だ．実際，$P_\beta(x)$ は分配関数密度，

$$P_\beta(x) = \langle x|\, e^{-\beta H}\, |x\rangle \tag{4.102}$$

である．(4.101) から明らかなように，自由エネルギーは主に分配関数密度 $P_\beta(x)$ が最大になるような範囲の積分で決まる．そのような x は次で決定できる．

$$\frac{dP_\beta(x)}{dx} = 0\,, \quad \frac{d^2P_\beta(x)}{dx^2} < 0\,. \tag{4.103}$$

このために，次で定義される**有効ポテンシャル** (effective potential) $V_{\rm eff}$ を導入すると便利だ．

$$V_{\rm eff}(x) = -\frac{1}{\beta}\ln P_\beta(x)\,. \tag{4.104}$$

(4.103) より, 有効ポテンシャルは確率密度を最大にする x の値を決定する. 有効ポテンシャルの定義より, このような x は次を満たさなければならない.

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dx} = 0\,, \quad \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dx^2} > 0\,. \tag{4.105}$$

すなわち有効ポテンシャルを**最小**にする位置が粒子を観測する確率の最も高い位置を決定するのだ. つまりこのような場所の周りで最も高い確率で振動しているのだ.

4.3節の有効作用の定義より, F_β は位置演算子の期待値(これを単に $\bar{x}$ と書く)の汎関数すなわち $F_\beta = F_\beta(\bar{x})$ と考えることができる. $\bar{x}$ が時間に依存しないと仮定する. これは $J = 0$ のときは確かになりたつ. 自由エネルギーは有効ポテンシャルを使って,

$$F_\beta(\bar{x}) \approx -\frac{1}{\beta}\ln\left(P_\beta(\bar{x})\int dx\right) = V_{\text{eff}}(\bar{x}) - \frac{1}{\beta}\ln\int dx \tag{4.106}$$

と書ける. (4.106) を有効作用の最低次に適用する. 有効作用の微分のみが重要であるので, 体積の対数に比例する部分である (4.106) の第2項は無視できる. このように近似した有効作用は, もう汎関数でなく単なる関数で,

$$\Gamma_\beta(\bar{x}) = V_{\text{eff}}(\bar{x}) + \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau\, J(\tau)\bar{x} \tag{4.107}$$

となっている.

$P_\beta(x)$ は経路積分で以前に開発した手法を用いて解析できる. $P_\beta(x)$ は,

$$P_\beta(x) = \int_x^x \overline{\mathcal{D}}q\, \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\, \left[\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) + Jq\right]\right\} \tag{4.108}$$

のような形をしており, $q = x + y$ と書き x の周りで展開することにより計算できる. このように置き換えることで $\tau = 0$ および $\tau = \beta$ で $y = 0$ と簡単になる.

$$\begin{aligned} P_\beta(x) \quad &= \quad \exp\left[-\beta V(x) - x\int_0^\beta d\tau\, J(\tau)\right] \\ &\quad \times \int_0^0 \overline{\mathcal{D}}y\, \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\, \left[\tfrac{1}{2}m\dot{y}^2\right.\right. \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}+J\right)y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}y^2+\cdots\Bigg]\Bigg\} . \qquad (4.109)$$

ただし $\cdots$ の部分は y の 3 次以上の項である. もし省略した項が無視できるほど十分小さいなら, (4.109) はウィック回転したガウス型の調和振動子の遷移振幅と同じ形なので簡単に評価できる. このような近似は**鞍点法**, または**最速降下法** (steepest descent) と呼ばれており [14], 有効ポテンシャルの評価によく使われる.

しかしながら, この方法に固有の欠点もある. 高次の項を無視すると近似が不正確になるという問題を別にすれば, (4.109) の二次の項の係数を負にするような x の値が存在しない限り問題は生じない. もし y^2 の係数が負になれば, ガウス近似は正しくなくなり, 高次の項を無視した経路積分は定義できなくなる. 関数 $P_\beta(x)$ は全ての x について積分されるので, 問題が生じないためには全ての実数 x に対して二次の係数が正でなければならない.

明らかに, もし係数が負になれば経路積分は展開の高次の項の寄与によって収束するのであろうが, 解析的な取り扱いは難しくなるかあるいは不可能になる. このことは次のような簡単な例でしめすことができる [15]. 実関数 $\exp(\frac{1}{2}\alpha x^2-\frac{1}{4}\gamma x^4)$ は $\alpha,\gamma>0$ のとき上限があり積分できる. しかしこれを γ で展開してから積分しようとすると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\frac{1}{2}\alpha x^2-\frac{1}{4}\gamma x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{1}{n!}(-\tfrac{1}{4}\gamma x^4)^n e^{\frac{1}{2}\alpha x^2} \qquad (4.110)$$

となり γ のどの次数でも発散する. これと同じようなことが (4.99) にも起きているのである

(3.60) の結果を使うと, 鞍点法より,

$$P_\beta(x)\approx\left(\frac{m\omega}{2\pi\sinh\beta\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\beta V(x)-x\int_0^\beta d\tau\, J(\tau)\right] \qquad (4.111)$$

となる. ただし (4.109) で y に比例する項の寄与は小さいものとして無視し

た. (4.111) の ω は x 依存性があり,

$$\omega = \left(\frac{1}{m} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.112}$$

で与えられる.

例題 4.13: (4.111) を確かめ, (4.109) の y に比例する項を無視して良いことを確かめよ.

例題 4.14: (4.111) の全体にかかる係数は周期的境界条件を用いて計算した次の微分演算子の行列式の関数になっていることをしめせ.

$$D = \frac{1}{m^2} \frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{\omega^2}{m^2} \,. \tag{4.113}$$

ポテンシャルの二階微分が負のとき ω は虚数になり, 先ほど述べた鞍点法の持つ問題があらわれる. ω が虚数になったときあらわれるサイン関数はゼロになる場合があるために, このときはどのような β についても (4.111) がよく定義できないが, この問題を除けば ω が虚数でも (4.111) は実数である. このような問題があるにも関わらず, (4.111) は全ての β に対して**最小値の付近で** 経路積分の良い近似になっていると仮定する.

(4.111) より有効ポテンシャルは,

$$V_{\text{eff}} = V(x) + \frac{1}{\beta} x \int_0^\beta d\tau\, J(\tau) - \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{m\omega}{2\pi \sinh \beta\omega} \right) \tag{4.114}$$

となる. $\beta \to \infty$ の極限でゼロ温度の有効ポテンシャルが得られる. $J = 0$ のときこれは,

$$V_{\text{eff}}^{\infty}(x) = V(x) + \tfrac{1}{2}\omega \tag{4.115}$$

となる.

例題 4.15: (4.115) を確かめよ.

(4.115) は $V(\bar{x})$ を無視すれば実質的に (4.24) と同じである．最小値での ω は系の基底状態付近での調和振動子近似により，低いエネルギーレベルの間の差を与えることがわかる．

(4.99) の特別な場合に戻ろう．このときのゼロ温度の有効ポテンシャルは，

$$V_{\text{eff}}^{\infty}(x) = -\tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \tfrac{1}{4}\gamma x^4 + \tfrac{1}{2}\omega\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{m}(3\gamma x^2 - \alpha)} \tag{4.116}$$

で与えられる．(4.116) が最小になる位置は γ が小さいとき簡単にみつけることができ，

$$\bar{x} \approx \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} - \frac{3}{4\alpha}\sqrt{\frac{\gamma}{2m}}\right) \tag{4.117}$$

となる．一方 $\bar{x} = 0$ は極大値に対応する．(4.117) から，二つの縮退したエネルギー状態が存在することがわかる．それらは次の振動数を持つ．

$$\omega \approx \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\,. \tag{4.118}$$

(4.117) の $\bar{x}$ は結合定数 γ の逆数を含むので**非摂動的** (nonperturbative) である．摂動論では実際の解が γ の級数展開であらわすことができると仮定しているので $\gamma \to 0$ で正則であるはずだ．

有効ポテンシャルが β にどのように依存するをみるために $x \approx 0$ でこれを解析する．パラメーターの広い範囲で，有効ポテンシャル (4.114) は，

$$V_{\text{eff}}(x) \approx \left(\frac{3\gamma}{4\beta\alpha} - \frac{\alpha}{2}\right)x^2 + \tfrac{1}{4}\gamma x^4 \tag{4.119}$$

となる．

例題 4.16: (4.119) が成立するパラメーターの範囲を求めよ．

(4.119) より，**臨界温度** (critical temperature) $T_c = 2\alpha^2/3\gamma$ のとき，$\bar{x} = 0$ が最小値になることがわかる．温度が T_c より高いときは熱エネルギーの平均は $x = 0$ でのポテンシャルの壁を乗り越えることができ，原点に対して対称的に振動するようになる．

系に, 左および右側の井戸に関する振動に対応する二つの基底状態が可能であるということは, 4.4節で導入したコヒーレント状態を使って解析できて, 状況を幾分深く明らかにできる. 4.4節で得られた結果より, コヒーレント状態間の調和振動子の遷移要素は,

$$\begin{aligned} Z_{ab} \quad &= \quad e^{i\frac{1}{2}(q_a p_a - q_b p_b)} \int_{p_a}^{p_b} \mathcal{D}p \int_{q_a}^{q_b} \mathcal{D}q \, \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \, \left[p\dot{q} \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{p^2}{2m} - \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2 \right] \right\} \end{aligned} \tag{4.120}$$

となる. ただし測度は,

$$\mathcal{D}q = \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \,, \quad \mathcal{D}p = \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi} \tag{4.121}$$

で与えられる.

(4.99) のポテンシャルでも (4.120) と同様の形式が妥当であると**仮定する**. この仮定が正しいためには, 定常的な振動子が経路積分を使って定義できなければならない. よってそのためのコヒーレントな始状態と終状態を選ぶことが可能でなければならない. コヒーレントな始状態と終状態に対するこのような拘束は**自己無矛盾の条件** (self-consistency condition) と呼ばれ, これにより調和振動子近似をしたときの基底状態の構造が決定される. いま, $p_a = p_b = 0$ と仮定する. $q_a = q_b = q_0$ とし, 運動量積分すると遷移振幅は,

$$Z_{00} = \int_{q_0}^{q_0} \overline{\mathcal{D}}q \, \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \, \left[\tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}\alpha q^2 - \tfrac{1}{4}\gamma q^4 \right] \right\} \tag{4.122}$$

となる. この遷移振幅の積分範囲は積分変数を q_0 だけ平行移動させることによって作用の中に組み込むことができる. その結果,

$$\begin{aligned} Z_{00} \quad &= \quad \int_{0}^{0} \overline{\mathcal{D}}q \, \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \, \left[\tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2} q_0^2 - \tfrac{1}{4}\gamma q_0^4 \right.\right. \\ &\left.\left. + \left(\gamma q_0^3 - \alpha q_0\right) q - \tfrac{1}{2}\left(3\gamma q_0^2 - \alpha\right) q^2 - \gamma q_0 q^3 - \tfrac{1}{4}\gamma q^4 \right] \right\} \end{aligned} \tag{4.123}$$

となる.

定常的な振動子に対する最小限の基準としては, q に比例する項が消え, 二次の項の係数が負でなければならない. 第一の条件は, 線形項は外場をあらわしており, それゆえ平衡系では存在することができないという理由に基づいている. 第二の条件は指数関数的な減衰, あるいは不安定な振舞いをあらわすような虚数の振動数といった好ましくないものがでてくるのを防ぐための条件である. これら二つの条件より $q_0 = \pm\sqrt{\alpha/\gamma}$ が得られ, (4.117) に主に効いてくる部分がわかる. (4.123) の作用は三次の項があるために $q \to -q$ のような対称性をもはや持たないということも明らかである. ゆえに系のこのような対称性は **自発的に破れた**のである. 以前に決めた臨界温度では原点に対して対称になり, 対称性が回復する.

(4.123) を導く過程で得られた対称性の破れは, たとえポテンシャルが対称的でも, 系の基底状態で演算子 Q がゼロでない期待値 q_0 を持つようになることから生じた. 実際, 基底状態に対する一次の近似を前節の調和振動子のコヒーレント状態で書くことも可能である. この近似的な基底状態は遷移要素を摂動論であらわした (4.123) の形を導くのに使うことができる.

> **例題4.17**:　コヒーレント状態から出発し, 量子力学の摂動論を使って,(4.123) と定常的な振動子が満たすべき条件を導け.

この結果は非常に重要な考え方をあらわしている. この後者の方法で決定された q_0 の値は次式から得られる**古典的**運動方程式の定数解に過ぎない.

$$\left.\frac{\partial V(q)}{\partial q}\right|_{q=q_0} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q^2}\right|_{q=q_0} > 0\,. \tag{4.124}$$

ただし $V(q)$ は変数の並進をしていないはじめの作用の持つポテンシャルである. このような解は, きちんと量子補正を考えた有効ポテンシャルの解析から得られた基底状態の正しい一次近似になっている. これは1.5節で非線型で非ガウス的なときにはじめて導入した**鞍点法**の拡張になっている. しかしながら, 非線型項があるために二次の作用のときのような運動方程式の古典解が量子的振舞いの全てを含んでいるという主張はできない. それにもかか

わらず, ここで得られた結果は, 非線型な量子系でも適当な境界条件を持つ古典解だけ変数を並進させた作用は一次の近似で役に立つということを強くしめしている.

次のような問題を考えると, この考え方がよくわかる. 系の温度を臨界温度より下げる. このとき, 自明でない基底状態が出現して, 系は $q_0 = 0$ の真空から $q_0 \neq 0$ の真空へ遷移する. エネルギーは縮退しているので, この縮退している真空のどちらに系が落ちてもよい. そして作用に外場項として含まれている外力によって系はどちらかの基底状態へと押し出されると考えてもよい. この状況は臨界温度より低い状態にあり外部からの弱い磁場にさらされている直線状の強磁性体に似ている. この議論では自由エネルギーの正定値性や $J = 0$ での有効作用の非正則性と関係する有効ポテンシャルの**凸性** (convexity) に関して微妙な点がいくつかある. このような問題はこの節では説明しきれなかった [15, 16]. しかし, 系が異なる二つの真空間を遷移するかどうかを考えることはでき, その答えは経路積分からすぐに導きだせる. 左側の真空から右側の真空へといったような遷移要素は,

$$Z_{L \to R} = \int_{-q_0}^{q_0} \overline{\mathcal{D}}q \, \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\alpha q^2 - \frac{1}{4}\gamma q^4 \right] \right\} \tag{4.125}$$

で与えられる.

例題 4.18: (4.125) を計算し, 通常の量子力学でよく知られている二重井戸型ポテンシャルでの結果と比較せよ.

この問題は9章の不安定な基底状態から安定な基底状態への遷移要素に関する議論とも関係してくる.

4.6 拘束条件

この節では経路積分に課せられる拘束条件について議論する. 量子力学で拘束条件を調べるのには微妙なところがあって意義深い. 以下では, 測度に

対していくらかの修正をすれば, 古典力学でよく使われているラグランジュの未定乗数法を経路積分に使うことができることをみる.

$2n$ 個の自由度, $\{p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n\}$, からなる位相空間を持つ古典力学系では, 拘束条件は座標の部分集合内の関係になっている. 簡単のため, 拘束条件は時間にあらわに依存しない, すなわち**スクレロノーマス** (scleronomous) な拘束条件であると仮定する. r 個のそのような拘束条件の組は座標の関数を使って次のように書ける.

$$f_i(p,q) = 0\,, \quad \frac{\partial f^i(p,q)}{\partial t} = 0 \;\;,\;\; i = 1, \ldots, r\,. \tag{4.126}$$

あるいは微分形を使って,

$$\delta f_i(p,q) = \frac{\partial f_i(p,q)}{\partial q_j}\,\delta q_j + \frac{\partial f_i(p,q)}{\partial p_j}\,\delta p_j = 0 \tag{4.127}$$

と書ける. 各拘束条件は $2n$ 次元位相空間 $\{p,q\}$ での超平面を決めている. r 個の超平面は自明でない交線を持っていて, それが拘束系に許される部分位相空間になっているとする. そうでなければ拘束系は存在しない.

拘束条件のために $2n$ 個の変数はもはや独立でなくなる. この拘束条件を作っている (拘束) 力が存在しなければならないが, これは前もって与えられているわけではない. (1.41) のオイラー・ラグランジュ方程式や (1.47) のハミルトンの方程式はもはや正しくない. なぜならこれらの方程式は全ての正準変数が独立であるという仮定の下に導き出されており, この仮定は (4.127) より今の場合なりたたない.

古典的なレベルでは, 各々の拘束条件にラグランジュの未定乗数 λ_i を導入し, ラグランジアン密度を次のように変形して解を得ることができる [6].

$$\mathcal{L}(p,q) \to \mathcal{L}(p,q) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(p,q)\,. \tag{4.128}$$

拘束条件がなりたっているとき, 変形した作用は元の作用に完全に一致する. ラグランジュの未定乗数があるおかげで変形した作用の変分をとることがで

き, 未定乗数は元の $2n$ 個の座標の変分が独立になるように選ばれる. この結果次の $2n$ 個の変形したハミルトンの方程式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H(p,q)}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial f_i(p,q)}{\partial p_j} , \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial f_i(p,q)}{\partial q_j} . \end{aligned} \tag{4.129}$$

r 個の拘束条件 (4.126) とこの $2n$ 個の力学方程式は, $2n+r$ 個の未知変数に対する方程式になっている.

拘束条件 $f_i(p,q)=0$ は系の時間発展に矛盾してはいけない. このことは, 拘束条件の時間微分は, 元の, あるいは**第一次** (primary) 拘束条件で決まる超平面上ではゼロにならなければならないと仮定することも意味している. 後に量子力学系で拘束条件を定義しなければならなくなくなるが, そのために今までのものをポアッソン括弧を使って書き換えておく. 各々の第一次拘束条件とハミルトニアンとのポアッソン括弧は p および q の関数を使って,

$$\{f_i, H\}_{p,q} = g_i(p,q) \tag{4.130}$$

と書ける. もし g_i がはじめの拘束条件で決まる超平面上でゼロにならないならば, **第二次** (secondary) 拘束条件という別の拘束条件が付け加わる. この第二次拘束条件と H とのポアッソン括弧は第一次拘束条件 f_i と第二次拘束条件 g_i で決まる超平面上で計算され, そしてさらに別の第二次拘束条件が必要になるときもあるであろう. このようなプロセスはいつかは終わり, 全ての拘束条件の時間発展がみたされるような位相空間中の超平面を見つけることができると仮定する. 古典的には, 必要なときには人為的に第二次拘束条件を導入していた. つまり通常第一次と第二次拘束条件間には区別がなかったのだ. しかし, 量子力学的な見方では様子がまったく異なる.

古典的にでも, また別の微妙な点がある. それは二つの拘束条件のポアッソン括弧がこれまでに決めた超平面上でゼロにならない可能性である. これらのポアッソン括弧が定数になってしまい, そしてそれゆえ単純に第二次拘束

条件に付け加えることができないという場合がよくある．このようなジレンマを解決するには，拘束条件をディラック流に取り扱えばよい [18]．第一次および第二次拘束条件は，第一類拘束条件 ϕ_i と第二類拘束条件 θ_j にわけることができる．第一類拘束条件は以下のように他の全ての拘束条件とのポアッソン括弧がゼロになる．

$$\{\phi_i, \phi_j\}_{p,q} = \{\phi_i, \theta_j\}_{p,q} = 0\,, \quad \forall i, j\,. \tag{4.131}$$

一方，このような性質を持たない拘束条件を第二類拘束条件と言う．第二類拘束条件同士のポアッソン括弧を，

$$\{\theta_i, \theta_j\}_{p,q} = t_{ij} \tag{4.132}$$

とあらわすと，行列 t はポアッソン括弧の反対称性より反対称である．この行列は逆を持ちそれを c と書きその成分を c_{ij} と書く．このとき c もまた反対称である．A と B の二つの量のディラック括弧はポアッソン括弧を用いて，

$$\{A, B\}_D = \{A, B\}_{p,q} - c_{ij}\,\{A, \theta_i\}_{p,q}\{\theta_j, B\}_{p,q} \tag{4.133}$$

と定義されている．

例題 4.19: 拘束条件どうしのディラック括弧及び拘束条件とハミルトニアンの間のディラック括弧はゼロになることを証明せよ．

ディラック括弧はポアッソン括弧と同じ一般的性質を持っている．ゆえに，ポアッソン括弧形式で書いた力学で**全ての**ポアッソン括弧をディラック括弧で置き換えることができる．こうすることにより，力学が拘束条件で制限された位相空間に矛盾しなくなる．

量子力学系では，矛盾なく拘束条件を導入することはさらに難しくなる．なぜなら，$2n$ 個の座標は演算子になり，これらの演算子は互いに非自明な交換関係に従うからだ．拘束条件に含まれる座標を演算子で置き換えると，拘束条件に含まれる全ての演算子が互いに交換しないかぎり演算子の順序からく

る不確定さが生じる．したがって，この節では量子力学系を考えるときは次のような演算子の拘束条件に限ることにする．

$$f_i(P_1, \dots, P_n) \equiv g_i(P) = 0\,,\quad f_i(Q_1, \dots, Q_n) \equiv f_i(Q) = 0\,. \tag{4.134}$$

そして簡単のために，第一次拘束条件として Q タイプか P タイプの拘束条件のみがあると仮定する．

(4.134) の拘束条件は古典的拘束条件と同じようには理解できない．なぜなら，演算子はヒルベルト空間上の作用を使ってのみ定義されるからである．その結果，(4.134) の拘束条件は全ヒルベルト空間の部分空間上でのみ正しい．この部分空間を**物理的部分空間** (physical subspace) と呼び，古典系で定義された拘束条件の超平面に対応するものと考えることができる．$|\psi\rangle_P$ を物理的部分空間に完全に含まれている状態とすると，拘束条件が成立していれば，

$$f_i(Q)\,|\psi\rangle_P = 0 \tag{4.135}$$

と書ける．物理的空間に直交する余分の空間は，当然のことながら**非物理的空間**と呼ばれている．(4.135) のように拘束条件をとることを，**強い**等式がなりたつという．拘束条件を次式を満たすような状態を定義するように弱い意味でとらえることもできる．

$$_P\left\langle\psi'\right|\ f_i(Q)\ |\psi\rangle_P = 0\,. \tag{4.136}$$

これを**弱い**等式がなりたっていると言う．観測可能量の行列要素のみが物理的に意味があるので弱い等式は意味がある．

> **例題 4.20**: 弱い等式から決定される物理的部分空間は，常に強い等式から決定されるものより大きいかあるいは等しいことをしめせ．

しかしながらいったん物理的部分空間が決まっても，量子力学でポアッソン括弧に相当するものを決定する問題といった別の困難がある．拘束条件の時間微分はハミルトニアンから生成され，

$$\frac{\partial f_j(Q)}{\partial t} = i[H, f_j(Q)] \equiv g_j(P, Q) \tag{4.137}$$

となる. これは新たな拘束条件になる. もし,

$$ {}_P\langle\psi'|g_j(P,Q)\,|\psi\rangle_P \neq 0 \tag{4.138} $$

がなりたつならば, 元の物理的部分空間は系のダイナミクスに矛盾する. 実際, (4.138) がなりたっていれば, はじめに物理的部分空間にあった系は, 時間発展とともに非物理的部分空間に成分を持つようになり, 拘束条件を破ることになる. もしこのようなことが起きれば, この第二次拘束条件を満たすように物理的部分空間を変えなければならない. 高次の交換関係も以上と同様に考えなければならない. ゆえに, 古典的な場合と同様, 第一次拘束条件 (4.135) は第二次拘束条件を次々とつくっていくであろう. そしてそれらに矛盾がないかどうかは特定の場合を詳しく調べることによってのみわかる. 以下では, このような拘束条件のつながりが有限個の第二次拘束条件で終わり, これらの全ての拘束条件を満たすような物理的部分空間が見つかると仮定する.

拘束条件の交換関係は物理的部分空間では消えないこともある. これが, ディラックによって解かれた量子力学のポアッソン括弧の問題である. 先ほどと同じように, 拘束条件を第一類拘束条件 ϕ_i と第二類拘束条件 θ_j にわける. 第一類拘束条件は全ての拘束条件との交換関係が次のようにゼロになる.

$$ [\phi_i, \phi_j] = [\phi_i, \theta_j] = 0\ . \tag{4.139} $$

これ以外の拘束条件が第二類拘束条件である. 第二類拘束条件どうしの交換関係は,

$$ [\theta_i, \theta_j] = t_{ij} \tag{4.140} $$

となる. また, 反対称行列 t の逆行列 c が存在すると仮定する. 二つの観測可能量に対するディラックの交換子 [18] は通常の交換子を使って,

$$ [A, B]_D = [A, B] - c_{ij}[A, \theta_i]\,[\theta_j, B] \tag{4.141} $$

と定義されている.

例題4.21: 空間を物理的部分空間に制限したとき, 全ての拘束条件のディラックの交換子と, 拘束条件とハミルトニアンとのディラックの交換子がともに同様ゼロになることをしめせ.

拘束系の量子力学は物理部分空間に制限し, 全ての交換子をディラックの交換子に置き換えて得られる.

例として, 平面上の粒子の量子力学を考える. ハミルトニアンを極座標を使って書くと,

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mR^2} \tag{4.142}$$

となる. そして次の交換関係がなりたっている.

$$[R, P_r] = i\,, \quad [\theta, P_\theta] = i\,. \tag{4.143}$$

この粒子に拘束条件 $R - a = 0$ を課し, 円周上に拘束する. この拘束条件は H とは交換せずに, $[R - a, H] = iP_r/m$ となる. この第二次拘束条件はハミルトニアンと交換するので, もうこれ以上拘束条件はでてこない. 物理的部分空間は拘束条件 $\phi_1 = P_r$ および$\phi_2 = R - a$ がなりたつように決める. しかし,

$$[\phi_1, \phi_2] = -i \tag{4.144}$$

がなりたつのでこれらは第二類拘束条件である. したがって, 行列 t は,

$$t = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.145}$$

となる. ゆえにこれの逆は,

$$c = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.146}$$

である. 以上により, この拘束系におけるディラックの括弧は,

$$[A, B]_D = [A, B] + i[A, P_r]\,[R, B] - i[A, R]\,[P_r, B] \tag{4.147}$$

となる.

拘束条件は, 経路積分の測度にあらわれる. とりあえず, はじめの拘束条件が $f(Q)$ のときのみを考える. 経路積分に拘束条件を課す手法は, 状態 $|q\rangle$ を物理的部分空間に射影する演算子を構成するところからはじまる. この射影演算子を P_P^q と書く. これは**巾等** (idempotent) である, すなわち $(P_P^q)^2 = P_P^q$ がなりたつ. ヒルベルト空間のある任意の状態 $|\psi\rangle$ にこれが作用した状態を $|\psi\rangle_P \equiv P_P |\psi\rangle$ と書くと, 次がなりたつ.

$$ {}_P\left\langle \psi' \middle| f(Q) \left|\psi\right\rangle_P \right. = 0 \,. \tag{4.148}$$

射影演算子は, $|q_1 \ldots, q_n\rangle \equiv |q\rangle$ と書かれるような Q_j の固有状態からつくられる. 拘束条件がなりたっている式を固有値を使って書くと,

$$ f(q_1, \ldots, q_n) = 0 \tag{4.149}$$

となる. そしてこの式が 各 q_n について次のように解けると仮定する.

$$ q_n = r(q_1, \ldots, q_{n-1}) \equiv r(q_\perp) \,. \tag{4.150}$$

ただし, 表記を簡単にするために, $q_\perp$ は拘束条件の変数q_n に対して直交する q_i の部分空間に解が含まれていることをしめしているとする. このとき, 射影演算子は,

$$ P_P^q = N_q \int d^n q \, \delta\Big(q_n - r(q_1, \ldots, q_{n-1})\Big) \, |q\rangle \langle q| \tag{4.151}$$

で定義される.

> **例題 4.22**: もし $N_q^{-1} = \delta(0)$ ならば (4.151) は巾等であることを確かめよ. ただし $\delta(0)$ はデルタ関数 $\delta(q)$ で $q = 0$ としたものだ.

デルタ関数の定義 (1.16) より, 規格化定数 N_q^{-1} は $V_p/2\pi$ である. ただし V_p は拘束条件の座標に正準共役な運動量の空間の体積である.

p_n に対する拘束条件は演算子を使って次のように書ける.

$$ P_P^p = N_p \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \, \delta(p_n) \, |p\rangle \langle p| \,. \tag{4.152}$$

これは, もし規格化定数を $N_p = 2\pi\delta(0)$ と選べば次の関係式を満たす.

$$P_P^p P_P^q P_P^p = P_P^p . \tag{4.153}$$

演算子 P_P^p は巾等では**ない**. その代わりに $P_P^p P_P^p = cP_P^p$ (ただし c は q_n と p_n からなる位相空間の全体積) がなりたつ. しかし, (4.153) から射影演算子 $P_P^q P_P^p$ は巾等であり, ゆえに遷移要素の時間間隔を分割するのに使うことができる. (4.152) にはデルタ関数 $\delta(p_n)$ が含まれているのでハミルトニアンとの交換関係で生じる第二次拘束条件を必然的に満たしている. 系が q_n に直交するような物理的部分空間から外れないためには, 正準運動量 p_n が消える必要がある.

2.2節で行ったのと同じことを繰り返し, 拘束系の経路積分表示の形を得るのはたやすいことだ. 無限小の中間状態の行列要素を定義するために, 二つの射影演算子(4.151) および (4.152) の積を使う. 2.2節でやったことを繰り返すと,

$$Z_{ab} = \int_{q_a}^{q_b} \mathcal{D}^c p\, \mathcal{D}^c q \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(p,q) \right\} \tag{4.154}$$

となる. ただし拘束条件下の測度は,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^c p\, \mathcal{D}^c q \quad &= \quad 2\pi\delta(0) \lim_{N\to\infty} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{d^n p_j}{(2\pi)^{n-1}}\, \delta(p_{nj}) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{N-1} d^n q_i\, \delta\Big(q_{ni} - r(q_{1i}, \ldots, q_{(n-1)i})\Big) \end{aligned} \tag{4.155}$$

で与えられる. $\delta(0)$ 以外の全ての係数は, 掛け算で打ち消しあう. 最後に q_n のデルタ関数を次のように書く.

$$\begin{aligned} &\delta\left(q_{nj} - r(q_{1j}, \ldots, q_{(n-1)j})\right) = \\ &\frac{\partial f(q_j)}{\partial q_{nj}}\, \delta\left(f(q_j)\right) = \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{\partial f(q_j)}{\partial q_{nj}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_j \exp\left[i\epsilon\lambda_j f(q_j) \right] . \end{aligned} \tag{4.156}$$

ただし, $\epsilon = (t_b - t_a)/N$ でデルタ関数の性質 (1.3) と (1.16) を使った. 全て

の結果をあわせると,

$$Z_{ab} = \int_{q_a}^{q_b} \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,\mathcal{D}\lambda\,\exp\left\{i\int_{t_b}^{t_a} dt\,\Big[\mathcal{L}(p,q) + \lambda f(q)\Big]\right\} \tag{4.157}$$

が得られる. ただし $\mathcal{D}p$ および $\mathcal{D}q$ は, (2.46) で定義される拘束されていない元の測度である. 拘束条件の下での測度 $\mathcal{D}\lambda$ は,

$$\mathcal{D}\lambda = 2\pi\delta(0)\lim_{N\to\infty}\delta(p_{n0})\prod_{j=1}^{N-1}\frac{\epsilon}{2\pi}\delta(p_{nj})\frac{\partial f(q_j)}{\partial q_{nj}}\,d\lambda_j \tag{4.158}$$

で与えられる. 変形したラグランジアン (4.128) が (4.157) の作用にあらわれるのは明らかである. ラグランジュの未定乗数は正準運動量を持たない新らたに付け加わった座標のように振舞って経路積分に測度として入ってきている.

この結果を多くの拘束条件のある系に一般化することは重要である. 特に, p_i と q_i を使って $\dot{q}_i$ を決定するような方程式が不定であるような特別な拘束条件を取り扱うことは重要だ. そのような場合では位相空間に拘束条件が課せられる. この一般的な拘束条件は**ゲージ** (gauge) 拘束条件と呼ばれている. なぜこう呼ぶかは7章で明らかになる. ゲージ拘束条件がなりたつ最も簡単な例としてラグランジアンが速度の部分集合 $\{\dot{q}_i\}$ ($i = 1, \ldots, M$) に依存しない場合がある. もし, 単純にこうでない場合でも変数を正準変換して, ラグランジアンが変換後の速度の集合に依存しないようにできる場合もある. このようにすると,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0\,,\quad i = 1, \ldots, M \tag{4.159}$$

となることがすぐにわかる. この M 個の式の集合は, 系の位相空間の第一次拘束条件と考えることができる.

(4.159) の拘束条件を決めるときに, 作用は q_i を含む項を持つと仮定しているので, 次のように M 個の第二次拘束条件があらわれる. それらはポアッソン括弧を使って古典的に,

$$\{p_i, H\}_{p,q} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = G_i(p,q) \tag{4.160}$$

で与えられる. このようにして与えられた拘束条件は全て第一類で, これ以上第二次拘束条件が生じないと仮定する.

経路積分の測度を使ってこれらの拘束条件をあらわすためには [19], 古典的拘束条件の式を解かなければならない. というのも, それを解けば経路積分の測度に必要な物理的空間が得られるからである. ゆえに, G_i は p_i に対して正準共役な q_i について解くことができ, 解が各 q_i に対して**一つ**しかないと仮定する. もしこの仮定がなりたっているならば, 拘束条件 $G_i = 0$ は M 個の解を持つ. 各解は拘束条件の組 $\{q_i\}$ に直交する位相空間に属するので, この解を $q_i = r_{i\perp}$ と書くことにする. 結局, 一つの拘束条件問題が単に M 個あるのと同じになった. もし拘束条件の式の解が一つに定まらないなら, 量子系に一意的に決まらない部分がでてきてしまう. このような場合は, 経路積分は複数の解のうちの一つのまわりの摂動展開をあらわすものとする [17]. 解がただ一つの場合は, 拘束条件を含む測度は,

$$\mathcal{D}^c p\, \mathcal{D}^c q = [2\pi\delta(0)]^M \lim_{N\to\infty} \prod_{j=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^n p_j}{(2\pi)^{n-M}}\, d^n q_i \times \prod_{m=1}^{M} \delta(p_{mj})\, \delta\big(q_{mi} - r_{mi\perp}\big) \tag{4.161}$$

で与えられる. (4.161) に含まれる変数の i と j の添字は, 積分変数の時間に対応するものである. また, (4.161) のデルタ関数の積は, (1.4) を多次元に拡張したものを使い,

$$\prod_{i=1}^{N-1} \prod_{m=1}^{M} \delta(q_{mi} - r_{mi\perp}) = \det\left|\frac{\delta G}{\delta q}\right| \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{m=1}^{M} \delta(G_{mi}) \tag{4.162}$$

と書ける. ただし $\delta G_{im}/\delta q_{jk}$ は行列式の表式中の行列 $M(N-1) \times M(N-1)$ の (im)(jk) 成分だ.

> **例題 4.23**: デルタ関数の積の積分形を使い (4.162) を証明せよ. ここで, 変数変換を適当に行なえば変換のヤコビアンとして行列式がでてくることを使え.

(4.162) の結果はポアッソン括弧を使うと,

$$\frac{\delta G_{im}}{\delta q_{jk}} = \{p_{jk}, G_{im}\}_{p_j,q_j} \tag{4.163}$$

と書ける. この形から, p_j から新しい座標 $\chi_j(q,p)$ に正準変換ができることがわかる. 正準変換したあとの変数を $Q_j(q,p)$ と書くことにする. 位相空間の全体積は定義からこの変換で不変である. したがって,

$$\prod_{i=1}^{N-1}\prod_{m=1}^{M} d\chi_{im}\, dQ_{im} = \prod_{i=1}^{N-1}\prod_{m=1}^{M} dp_{im}\, dq_{im} \tag{4.164}$$

がなりたつ. ポアッソン括弧も同様に不変で,

$$\{p_{im}, G_{jk}\}_{p_i,q_i} = \{\chi_{im}, G_{jk}\}_{p_i,q_i} \tag{4.165}$$

となる. 作用に正準変換の生成汎関数の時間微分を付け加えなくてはならないが, (4.47) の議論よりこのような項は積分されてしまうので, in 状態と out 状態の位相にしか寄与しない. 以上の結果をまとめると測度は最終的に,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^c p\, \mathcal{D}^c q \quad = \quad & [2\pi\delta(0)]^M \lim_{N\to\infty} \prod_{j=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^n p_j}{(2\pi)^{n-M}}\, d^n q_i \\ & \times \det\{\chi, G\} \prod_{m=1}^{M} \delta(\chi_{jm})\, \delta(G_{jm})\end{aligned} \tag{4.166}$$

となる. 拘束条件はラグランジュ未定乗数を使って作用に取り込むことができるが, この項はここではあらわに書かない. 正準変換された運動量 χ (これはゼロにならなければならない) を**ゲージ条件** (gauge condition) と呼ぶ. この呼び方はゲージ場の理論では, ある正準運動量がゼロならラグランジアンがゲージ対称性を持つことに関係していることからきている. この系の拘束条件下の測度は, 第一次および第二次拘束条件のポアッソン括弧の行列式により特徴づけられる. 二つの第二類拘束条件 θ_1 と θ_2 があるとき, 測度はさらに $\|\det\{\theta_1, \theta_2\}\|^{1/2}$ に比例する分だけ変更を受ける. しかしここではこれをしめさない [20].

例題 4.24: 3.4節では, 円周上を自由に運動する粒子のトポロジー的な測度を導いた. これを, 平面上で自由運動をする粒子に $r = a$ という拘束条件を課して再現できることをしめせ.

参考文献

[1] 例えば, ジャクソン著 「古典電磁気学」 吉岡書店, をみよ.

[2] R.P. Feynman, *Statistical Mechanics*, Benjamin, Reading, Mass., 1972.

[3] F.W. Wiegel, Phys. Rep. **16**, 57 (1975).

[4] K. Huang, *Statistical Mechanics*, Wiley, New York, 1963.

[5] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12**, 570 (1957); P.C. Martin and J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).

[6] 例えば, ゴールドスタイン著 「古典力学」 吉岡書店, をみよ.

[7] ここでの説明は, C. Itzykson and J.–B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980 にある.

[8] 量子力学的対称性については, メシア著 「量子力学」 東京図書 をみよ.

[9] T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. **128**, 885 (1962).

[10] この章でとり扱った対称性から導きだされる恒等式は, B. Zumino in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics*, ed. S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1970 からとった.

[11] 代数についての抽象的な数学的性質については, T. Hungerford, *Algebra*, Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1973 をみよ.

[12] コヒーレント状態は, R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963) で場の理論および量子光学に応用された. 量子力学ではそれ以前にコヒーレ

ント状態が使われていた. コヒーレント状態の一般的な性質は, W.–M. Zhang, D.H. Feng, and R. Gilmore, Rev. Mod. Phys. **62**, 867 (1991) をみよ. また, [13] も参照せよ.

[13] コヒーレント状態を使った経路積分のて構成は, 時には**準同型表現** (holomorphic representation) と呼ばれる. これについては次のクラウダーの研究が有名である. 例えば, J.R. Klauder, Ann.Phys. **11**, 123 (1960); J.R. Klauder, Phys. Rev. D**19**, 2349 (1979); J.R. Klauder and B.S. Skagerstam, *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, 1985 をみよ.

[14] この手法についての初期の文献に J. Iliopoulos, C. Itzykson, and A. Martin, Rev. Mod. Phys. **47**, 165 (1975) がある.

[15] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, New York, 1987.

[16] $J = 0$ での有効ポテンシャルの非正則性と基底状態の縮退についての関係は, Norimatsu, K. Yamamoto, and A. Tanaka, Phys. Rev. D**35**, 2009(1987) で議論されている.

[17] 古典および量子系において拘束条件の取り扱いに関しては, K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1983 で説明されている.

[18] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A**246, 326 (1958); P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.

[19] 経路積分の測度の第一類拘束条件の取り扱いは, L.D. Faddeev, Teoret. i Mat. Fiz. **1**, 3 (1969), translated in Theoret. Math. Phys. **1**, 1 (1970) においてはじめて指摘された.

[20] 測度が第二類拘束条件を含んでいることは, P. Senjanovic, Ann. Phys. **100**, 227 (1976) において導かれた.

第5章　グラスマン変数

いままでの結果は実および複素変数を使った通常の解析から得られたものであった. その変数は互いに可換であり, ゼロでないのは, (2.1) のような異なる二つの演算子間の**交換子**であると, 深く考えずに仮定していた. 以降このような数を c 数と呼び, 演算子は **ボソン** (boson) 的と分類する. しかし, 異なる種類の変数が必要になる系も考えることができる. この異なる種類の変数は反可換 [1] で, グラスマン数 [1] あるいは a 数と呼ばれている. このような数に対応する演算子は**フェルミオン** (fermion) 的と分類する. この章では, この種の変数の持つ一般的性質を説明する. この変数の持つ性質の多くは直感に反するので, 明確に定義し, 注意して式変形しなければならない. ここでは a 数を使って古典および量子力学の反可換形式を構成し, ドウィット (DeWitt) の教科書 [2] にあるようにグラスマン数を使った量子力学的遷移振幅の経路積分表示を得る.

グラスマン数は一階微分演算子の積で二階微分演算子を書くという数学的な問題と遠い関係がある. この演算子をあらわすのにグラスマン数が必要になった. 汎関数形式の場の理論では, グラスマン数はシュウィンガーによってはじめて導入され [3], 後にブレザン (Berezin) によって使われた [4]. 次の章でフェルミオン場の経路積分を考える際にもう一度これについて議論する. しかし, この章でも簡単な例をいくつかのグラスマン数の量子力学系で議論する. また, グラスマン数は後の章で議論するゲージ場の理論における BRST

[1] 可換でもなく反可換でもないような変数も存在する, ここではこのような変数は考えないことにする.

不変性や超対称性を持つ理論でも中心的な役割を果たす.

5.1節では, 実あるいは複素グラスマン数の持つ基本的性質について紹介し, グラスマン数の微分と積分を定義する. 5.2節では, 実および虚数のグラスマン変数に関するガウス積分を計算する. 5.3節では, 変数がグラスマン数のときの古典力学について考え, オイラー・ラグランジュ方程式やハミルトンの方程式に相当するものを導く. 5.4節では, a数が固有値になっていたり反交換関係を満たすような演算子であらわされた量子力学を考える. 5.5節では, グラスマン数であらわされた量子力学の経路積分表示を構成しそれを評価する. また, 5.5節ではフェルミオンのコヒーレント状態を構成する. これは6章で量子場の経路積分表示を導く際に非常に重要になる. 5.6節で超対称量子力学の初歩を簡単に紹介してこの章をしめくくる.

5.1 基本的な定義

もし $\{\eta_a\}$ ($a = 1, \ldots, N$) が全ての a および b に対して次の反交換関係を満たすならば, $\{\eta_a\}$ はグラスマン数であるという.

$$\eta_a \eta_b + \eta_b \eta_a \equiv \{\eta_a, \eta_b\} = 0 \,. \tag{5.1}$$

反交換関係から $\eta_a^2 = 0$ はすぐにわかる. 実または虚の c数 x はグラスマン数と可換であり, $x\eta_a = \eta_a x$ となる. これらのグラスマン数は複素共役の下で不変, つまり $\eta_a^* = \eta_a$ ならば実であるという. グラスマン数は通常の実数のように数を数えたり量を測ったりする役割を果たすものとみるのは不可能である. その代わりにグラスマン数は, ある特別な代数 (この概念は4.3節で導入した)を満たす手段とみるべきである. この意味で, 実数ゼロはc数でもありグラスマン数でもある. なぜならゼロはそれ自身も含め, 全てのグラスマン数と反可換であるからだ. グラスマン数の定義 (5.1) はグラスマン数の満たす代数の定義ともみることができる.

N 個の実グラスマン数の系を考えると, 任意の N 個のグラスマン数の積は,

$$\eta_{a_1}\eta_{a_2}\cdots\eta_{a_N} = \varepsilon^{a_1 a_2 \cdots a_N}\eta_1\eta_2\cdots\eta_N \tag{5.2}$$

と書ける. ただし, $\varepsilon^{abc\cdots}$ は(1.54)で定義されている N 次のレビ・チビタの記号である.

例題 5.1: (5.2) を確かめよ.

グラスマン数の関数, 特に多項式を考えることができる. 有限個のグラスマン数で書いたどんな関数も有限次の項で終わらなければならないことをみるのはたやすい. これは, $\eta_a^2 = 0$ という事実から簡単に導きだせる. 例えば, もし $f(x,\eta)$ が c数 x および一つのグラスマン数 η の多項式であらわされる関数であるならば, $f(x,\eta) = f_1(x) + f_2(x)\eta$ という形をしていなければならない. この関数は超対称性と関係しており, このような関数を今後グラスマン関数 (superfunction) と呼ぶ. また, x と η をあわせた空間は超空間 (superspace) と呼ばれる.

例題 5.2: N 個のグラスマン数で書かれた一般の関数 $f(x,\eta_a)$ は多項式で展開したとき 2^N 個の項を持つことをしめせ.

N 個のグラスマン数を含む一般の多項式は遇数個のグラスマン数の積からなる項を 2^{N-1} 個, 奇数個のグラスマン数の積からなる項を 2^{N-1} 個持つ.

例題 5.3: 奇数個のグラスマン数の積もグラスマン数になっている, すなわちグラスマン数の性質 (5.1) を満たしていることをしめせ. 一方, 遇数個のグラスマン数の積は他の全ての数と可換であることもしめせ.

これらの結論は, グラスマン数で書かれた一般の多項式がグラスマン数および通常の数の両方について等しい自由度を持っていることを意味している. これが超対称性の持つ主な特徴であり, 反可換な自由度と可換な自由度の数が一致しているのである.

ゼロの周りでテイラー展開できるどんなc数関数も級数展開されている部分にa数を代入することによってa数の関数にすることができる. 例えば, グラスマン数ηの指数関数は高次の項が全てゼロになるので,

$$e^{\eta} = 1 + \eta \tag{5.3}$$

で与えられる. 指数関数に対するこの級数展開を使った表示は, グラスマン数でのベーカー・キャンベル・ハウスドルフの定理を証明するのに使われる. ηとξをグラスマン数とすると, この定理より,

$$e^{\eta+\xi} = e^{\eta}e^{\xi}e^{-\frac{1}{2}[\eta,\xi]} \tag{5.4}$$

がなりたつ.

例題 5.4: (5.4) を確かめよ.

複素グラスマン数ζは二つの実グラスマン数η_Rとη_Iを使って, $\zeta = \eta_R + i\eta_I$とあらわすことができる. また複素共役は, $\zeta^* = \eta_R - i\eta_I$とあらわすことができる. η_Rおよびη_Iがグラスマン数なので, $\zeta^2 = \zeta^{*2} = 0$がなりたつ. 複素グラスマン数とその複素共役の積は,

$$\zeta^*\zeta = i(\eta_R\eta_I - \eta_I\eta_R) = i[\eta_R, \eta_I] \tag{5.5}$$

で与えられる. (5.5) の積が実, すなわち$(\zeta^*\zeta)^* = \zeta^*\zeta$という条件から, 二つのグラスマン数の積は,

$$(\eta_a\eta_b)^* = \eta_b\eta_a = -\eta_a\eta_b \tag{5.6}$$

を満たすことがわかる.

例題 5.5: (5.6) の結果をN個の複素グラスマン数ζ_aの積に拡張し,

$$(\zeta_a\zeta_b\cdots\zeta_c)^* = \zeta_c^*\cdots\zeta_b^*\zeta_a^* \tag{5.7}$$

をしめせ.

グラスマン数の複素共役は形としては行列のエルミート共役をとるのと似ている.

グラスマン数の積の微分を考えるときには, グラスマン数の並ぶ順序によって積の符号が変わるので注意しなければならない. 微分は左あるいは右からかかる. この微分のかかる方向によって結果の符号が変わる. 左微分と右微分を次のように定義する.

$$\frac{\partial \eta_b}{\partial \eta_a} = -\eta_a \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \eta_b} = \delta_{ab} \ . \tag{5.8}$$

そして, 次の反ライプニッツ則がなりたつ.

$$\frac{\partial}{\partial \eta_a}(\eta_b \eta_c) = \frac{\partial \eta_b}{\partial \eta_a}\eta_c - \frac{\partial \eta_c}{\partial \eta_a}\eta_b = \delta_{ab}\eta_c - \delta_{ac}\eta_b \ . \tag{5.9}$$

右微分に対しては,

$$(\eta_b \eta_c) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \eta_a} = \delta_{ac}\eta_b - \delta_{ab}\eta_c \ . \tag{5.10}$$

となる. $\eta_a \cdots \eta_b \cdots \eta_c$ という積の η_b の左から数えたときの順番を p とする. ただし一番左は $p=0$ とする. そうすると, (5.9) を拡張した,

$$\frac{\partial}{\partial \eta_b}(\eta_a \cdots \eta_b \cdots \eta_c) = (-1)^p (\eta_a \cdots \eta_c) \tag{5.11}$$

が得られる. 以下では主に左微分を使うが, 別の規約も可能であることを憶えておこう.

グラスマン数の積分を定義するために, グラスマン数の微分の持つ性質を決定しなければならない. N 個のグラスマン数の系に対して, 微分演算子はそれを c数で書いたものと同じ形をしているとする.

$$d = d\eta_a \frac{\partial}{\partial \eta_a} \ . \tag{5.12}$$

この定義より簡単に,

$$d(\eta_a \eta_b) = d\eta_a \, \eta_b - d\eta_b \, \eta_a \tag{5.13}$$

がわかる. 積の変分はライプニッツ則を満たすとする.

$$d(\eta_a \eta_b) = d\eta_a \, \eta_b + \eta_a \, d\eta_b \ . \tag{5.14}$$

(5.13) および (5.14) より,

$$\{\eta_a, d\eta_b\} = 0 \tag{5.15}$$

がなりたつ. これより, $d\eta_b$ 自身もグラスマン数であることがわかる.

一つの実グラスマン数に対して, 二つの積分 $\int d\eta$ および$\int d\eta\,\eta$ のみが意味を持つ. なぜなら η と $d\eta$ がグラスマン数であるので他の全ての積分はゼロになるからである. $d\eta$ がグラスマン数であることより, 定積分 $\int d\eta$ の結果はグラスマン数にならなければならない. 積分 $\int d\eta\eta$ は, 他の全てのグラスマン数と可換であるのでc数である. グラスマン数は順序数でないし可量的な数でもないのでジョルダン測度と同じようにはグラスマン数の測度を定義できない. また, 積分をリーマン和に置き換えることもできない. ゆえに, これらの積分を定義するには別の基準を設ける必要がある. c数のガウス積分を計算するには並進対称性が重要であったことを思い出そう. この性質が成り立つように, グラスマン数の積分はグラスマン数の並進で不変であるように定義される. ξ を元の積分変数を並進させるような $d\xi = 0$ を満たすa数の定数とし, 並進による変数の置き換え$\eta = \eta' + \xi$ で上の二つの積分は不変であると仮定する. この仮定より,

$$\begin{aligned} &\int d\eta' = \int d\eta\,, \\ &\int d\eta'\,\eta' = \int d\eta\,(\eta - \xi) = \xi \int d\eta + \int d\eta\,\eta \end{aligned} \tag{5.16}$$

がなりたつ. (5.16) より,

$$\int d\eta = 0 \tag{5.17}$$

となる. ゼロはグラスマン数なので, (5.17) は代数に矛盾しない. $\int d\eta\,\eta$ は他の全てのグラスマン数と可換なので, c数で書けるはずである. η の規格化を,

$$\int d\eta\,\eta = -\int \eta\,d\eta = 1 \tag{5.18}$$

と選ぶ. グラスマン数に左および右微分を作用した結果と左および右積分を作用した結果は一致している.

実グラスマン数に対して (5.18) のように規格化すると,

$$\left(\int d\eta\,\eta\right)^* = \int \eta^*\,d\eta^* = -\int d\eta^*\eta = 1 \tag{5.19}$$

となる. ただしここで (5.18) と $d\eta^*$ がグラスマン数であるという事実を使った. これより実グラスマン数に対して,

$$d\eta^* = -d\eta \tag{5.20}$$

がなりたつことがわかる.

積分変数を取り換えた際のグラスマン数のヤコビアンを決めるのに, 以上の積分の規則を使う. N 個のグラスマン変数 η_a を含むどんな積分も別のグラスマン変数 θ_a に変数変換しても不変であることを要求すれば, ヤコビアンが決定できる. 簡単のためこの変数変換が次の形をしていると仮定する.

$$\eta_a = M_{ab}\theta_b\,. \tag{5.21}$$

ただし M_{ab} は逆行列をもつc数行列 $\mathbf{M}$ の成分をあらわす. この変換が線形でc数なので変数 θ もグラスマン代数を満たす. 変換にともなうグラスマン数のヤコビアン J_G は, 以下のように積分が変換で不変であることより決定できる.

$$\int d\eta_1\cdots d\eta_N\,f(\eta_1,\ldots,\eta_N) = \int d\theta_1\cdots d\theta_N\,J_G\,f'(\theta_1,\ldots,\theta_N)\,. \tag{5.22}$$

ただし f' は (5.21) の変数変換を f に代入したものである. (5.17) と (5.18) の積分規則より, f の中で$\eta_1\cdots\eta_N$ に比例する, すなわち全ての N 個のグラスマン変数を含む項のみが (5.22) の左辺の積分に寄与する. 結果として, ヤコビアンは (5.21) の変換で生じた係数を打ち消すような形をしていなければならない. このことより変換の下で,

$$\eta_1\cdots\eta_N = J_G^{-1}\theta_1\cdots\theta_N \tag{5.23}$$

がなりたつことがわかる. 変換を代入すると,

$$\begin{aligned}\eta_1\cdots\eta_N &= M_{1a_1}M_{2a_2}\cdots M_{Na_N}\theta_{a_1}\cdots\theta_{a_N}\\ &= \varepsilon^{a_1a_2\cdots a_N}M_{1a_1}M_{2a_2}\cdots M_{Na_N}\theta_1\cdots\theta_N\end{aligned}\tag{5.24}$$

となる. ただしここで例題5.1の結果を使った. (1.54) の行列式の定義と (5.23) および (5.24) を比較すると, ヤコビアン J_G は $J_G = (\det M)^{-1}$ となることがわかる. $M_{ab} = \partial\eta_a/\partial\theta_b$ であるので,

$$J_G = \left[\det\left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right)\right]^{-1} .\tag{5.25}$$

これは (1.101) の逆である.

積分変数の複素グラスマン数への拡張には多少微妙な点がある. 複素変数 η は二つのグラスマン変数 θ_1 とθ_2 を使って, $\eta = \theta_1 + i\theta_2$ と書ける. ゆえに,

$$d\eta = d\theta_1 + id\theta_2\tag{5.26}$$

となる. 複素共役をとるのに (5.7) の規則に従うと,

$$(d\eta)^* = -d\theta_1 + id\theta_2 = -d(\eta^*) \equiv -d\eta^*\tag{5.27}$$

となる. ゆえに複素変数 η に対して,

$$\left(\int d\eta\,\eta\right)^* = \int \eta^*\,(d\eta)^* = -\int \eta^* d\eta^* = \int d\eta^*\,\eta^*\tag{5.28}$$

がなりたつ.

例題5.6: グラスマン数のヤコビアンの形と $\eta = \theta_1 + i\theta_2$ （ただし θ_1 および θ_2 は実グラスマン数とする）から,

$$\int d\eta^*\,\eta^* \int d\eta\,\eta = -\int d\eta^* d\eta\,\eta^*\eta = 1\tag{5.29}$$

をしめせ.

これより, 整合性から, 複素グラスマン数の積分は,

$$\int d\eta\,\eta = \int d\eta^*\,\eta^* = 1$$
$$\int d\eta = \int d\eta^* = 0 \tag{5.30}$$

となっていなければならない. これは (5.28) および (5.29) の両方に矛盾しない.

グラスマン数に対するデルタ関数は非常に簡単に定義できる. c 数の場合を拡張して, 一つのグラスマン変数のデルタ関数は,

$$\int d\eta\,\delta(\eta-\eta')f(\eta) = f(\eta') \tag{5.31}$$

を満たすものとする. ただし η および η' はどちらもグラスマン数である. 積分の規則と f の級数展開表示より,

$$\delta(\eta-\eta') = \eta-\eta' \tag{5.32}$$

が簡単に得られる.

例題 5.7: (5.32) が (5.31) を満たすことを確かめよ.

またグラスマン数のデルタ関数は,

$$\delta(0) = 0$$
$$\delta(\alpha\eta) = \alpha\delta(\eta)$$
$$\delta(\eta-\eta') = -\delta(\eta'-\eta)$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\delta(\eta-\eta') = 1 \tag{5.33}$$

を満たす. 一変数のデルタ関数の積からグラスマン変数が複数あるときの一般化されたデルタ関数を構成できる. デルタ関数の定義中のグラスマン数の並びかたは測度の中にでてくるグラスマン数の並びかたに奇置換したものに

一致しなければならない．デルタ関数の積分形はたやすく構成できる．グラスマン変数が一つのときは，

$$\delta(\eta-\eta')=\int d\xi\, e^{\xi(\eta-\eta')} \tag{5.34}$$

となる．ただし ξ もグラスマン変数である．測度の中にあらわれる積分変数の並び順が (5.32) を使ってデルタ関数を構成する際の変数の順番を決めるので，グラスマン変数がたくさんあるときへの一般化は一意的でない．

例題 5.8: N 個の実グラスマン変数に対して，

$$\int d\xi_{a_1}\cdots d\xi_{a_N}\ \exp\{\xi_j(\eta_j-\eta'_j)\}=(\eta_{a_N}-\eta'_{a_N})\cdots(\eta_{a_1}-\eta'_{a_1}) \tag{5.35}$$

を確かめよ．

例題 5.9: グラスマン変数 η の任意関数 $f(\eta)$ が，

$$\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\right)f(\eta)=f(\eta) \tag{5.36}$$

を満たすので，

$$\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\right)=1 \tag{5.37}$$

となることを証明せよ．

5.2 グラスマン数のガウス積分

この節では (1.97) と同じ形の積分をグラスマン変数であらわしたものを評価する．これは後に経路積分を考える際に役にたつ．複素グラスマン数 η に対してなりたつ，

$$\int d\eta^*\, d\eta\, e^{-\eta^*\eta}=1 \tag{5.38}$$

がこの節での計算の鍵になる．(5.38) は指数関数を級数展開し，グラスマン数の積分の規則を使えば得られる．

N 個の複素変数がある場合, (5.38) は,

$$I = \int d\eta_1^* d\eta_1 \cdots d\eta_N^* d\eta_N \ \exp(-\eta_j^* M_{jk} \eta_k) \tag{5.39}$$

と拡張できる. ただし M_{jk} は $n \times n$ c数行列 $\mathbf{M}$ の成分である. 行列 $\mathbf{M}$ はエルミートであると仮定する. そうすると, I は実 c数となる. $\mathbf{M}$ はエルミートなので, 1.5節で行ったようにユニタリー行列 $\mathbf{U}$ を使って対角化でき, 対角行列 $\mathbf{D} = \mathbf{U}\mathbf{M}\mathbf{U}^\dagger$ は成分,

$$D_{jk} = \lambda^{(j)} \delta_{jk} \tag{5.40}$$

を持つ. ただし $\lambda^{(j)}$ は行列 $\mathbf{M}$ の j番目の固有値である. グラスマン変数は $\eta_j = U_{jk}\xi_k$ と変換され, $\mathbf{U}$がユニタリーであることより, この変換のヤコビアンは $\det \mathbf{U} \det \mathbf{U}^\dagger = \det \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = 1$ となる. グラスマン数の性質を使うと, 変換後の積分 I は,

$$I = \prod_{j=1}^{N} \int d\xi_j^* d\xi_j \ \exp(-\lambda^{(j)} \xi_j^* \xi_j) \tag{5.41}$$

と書ける. ただし j の和はとらない. (5.38) より積分は,

$$I = \prod_{j=1}^{N} \lambda^{(j)} = \det \mathbf{M} \tag{5.42}$$

となり, 再び c数で計算したときの逆数の結果が得られた.

これで実グラスマン数のガウス積分を評価できるようになった. N 個のグラスマン変数の組 $\{\theta_j\}$ に対して,

$$I = \int d\theta_1 \cdots d\theta_N \ \exp(-\theta_j M_{jk} \theta_k) \tag{5.43}$$

という積分を考える. M_{jk} が実c数のときのみ考える. 上と同じように M_{jk} は実数行列 $\mathbf{M}$ の成分である. $\mathbf{M}$ をこれ以上何も制限しなくても, $\mathbf{M}$ の反対称部分のみが I に効いてくる.

例題 5.10: $\mathbf{M}$ の反対称部分を $\mathbf{M}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{M} - \mathbf{M}^T)$ と書くと,

$$\theta_j M_{jk} \theta_k = \theta_j M^A_{jk} \theta_k \tag{5.44}$$

がなりたつことをしめせ.

以下では, $\mathbf{M}$ が実反対称行列であると仮定する.

I の2乗を考えると I の解析が非常に簡単になる. I の2乗を,

$$I^2 = \int d\theta_1 \cdots d\theta_N d\xi_1 \cdots d\xi_N \ \exp(-\theta_j M_{jk} \theta_k - \xi_j M_{jk} \xi_k) \tag{5.45}$$

と書く. ただし $\{\xi_j\}$ もグラスマン数であり, 指数関数の引数をまとめるのにグラスマン数の2乗が可換であるという性質を使った. この積分は新しい変数 $\eta_j = \frac{1}{2}(\theta_j + i\xi_j)$ を使って複素変数の積分に変換できる. $\mathbf{M}$ が反対称であることより, 指数関数の引数は,

$$-\theta_j M_{jk} \theta_k - \xi_j M_{jk} \xi_k = -\eta_j^* M_{jk} \eta_k \tag{5.46}$$

となる. ヤコビアンの解析は例題にしておく.

例題 5.11: 上の変換でヤコビアンは,

$$J_G = \begin{cases} (-1)^{3N/2}(2i)^N & N \text{ が偶数の場合} \\ (-1)^{3(N-1)/2}(2i)^N & N \text{ が奇数の場合} \end{cases} . \tag{5.47}$$

となることをしめせ.

以上の結論をまとめると,

$$I^2 = J_G \int d\eta_1^* d\eta_1 \cdots d\eta_N^* d\eta_N \ \exp(-\eta_j^* M_{jk} \eta_k) \tag{5.48}$$

となる. $i\mathbf{M}$ がエルミート行列であることより, 積分は,

$$I^2 = J_G \det \mathbf{M} \tag{5.49}$$

となる．これと例題1.11より，もし N が奇数ならば積分はゼロになることをしめすことができる．これは N が奇数ならば積分はグラスマン数でなければならないことから導かれる．N が偶数のときは，ヤコビアンを使って，

$$I = 2^{N/2}\sqrt{\det \mathbf{M}} \tag{5.50}$$

を得る．

これらの結果をグラスマン変数の線形項を含む場合に一般化することを次の二つの例題にしておく．

例題 5.12: N 個の 実グラスマン変数 $\{\theta_j\}$ と N 個の実グラスマン定数 $\{K_j\}$ の系を考える．もし N が偶数で $\mathbf{M}$ が実反対称行列ならば，

$$\begin{aligned}\int d\theta_1 \cdots d\theta_N \exp(-\theta^T \mathbf{M}\theta + K^T\theta) \\ = 2^{(N/2)}\sqrt{\det \mathbf{M}}\exp(-\tfrac{1}{4}K^T\mathbf{M}^{-1}K)\end{aligned} \tag{5.51}$$

がなりたつことをしめせ．ただし行列の添え字は省略した．

例題 5.13: N 個の複素グラスマン変数 $\{\eta_j\}$ と N 個の複素グラスマン定数 $\{K_j\}$ の系を考える．このとき，

$$\begin{aligned}\int d\eta_1^* d\eta_1 \cdots d\eta_N^* d\eta_N \exp(-\eta^\dagger \mathbf{M}\eta + K^\dagger\eta + \eta^\dagger K) \\ = \det \mathbf{M}\exp(K^\dagger \mathbf{M}^{-1}K)\end{aligned} \tag{5.52}$$

がなりたつことをしめせ．ただし $\mathbf{M}$ はエルミート行列である．

5.3　グラスマン変数による古典力学

この節では，グラスマン数を変数とする古典力学を考える．もちろん，その結果は通常の古典力学の結果ときわめて異なったものになる．しかしながら，

通常の古典力学でなじみ深い作用やハミルトニアンといった概念はそのままある. また, それらと同じくらい重要なポアッソン括弧形式もグラスマン変数の系に適用できる. このためにグラスマン変数による量子系が構成できる.

簡単な場合として, 一つのグラスマン変数であらわされる粒子を考える. "位置" をあらわすグラスマン変数 η に時間 t 依存性を持たせて, $\eta = \eta(t)$ と書く. η は実グラスマン変数で, 次元を持たない (これは必ずしも必要ではない). η がグラスマン数であることより $\{\eta(t), \eta(t')\} = 0$ がなりたつ. η はグラスマン数を値に持つ t の関数なので, 時間微分が存在し, それを $\dot{\eta}$ と書く. $\dot{\eta}$ もグラスマン数であることはたやすくしめすことができる.

次に作用を構成する. $\dot{\eta}^2$ といった項は明らかにゼロになるので, 作用にはあらわれない. 作用としては次のようなものが考えられる.

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L} = i \int_{t_a}^{t_b} dt\, \eta\, \dot{\eta}\, . \tag{5.53}$$

この作用は二つの興味深い点を持つ. 第一は, もし η が c数ならば, この作用は部分積分できて, 端点での η^2 の差になる. c数変数ならば $\eta\dot{\eta} = \dot{\eta}\eta$ がなりたつということが効いてきて, このような結果になるのである. グラスマン数では上のような性質がないので, 同じような議論で (5.53) の作用が消えるとは言えない. 第二は, (5.6) より, 作用を実数にするためには係数 i が必要だということである.

この系の運動方程式を得るために, η の変分 $\eta \to \eta + \delta\eta$ を考える. ただし $\delta\eta$ は別のグラスマン変数で, $\delta\eta(t_b) = \delta\eta(t_a) = 0$ を満たすとする. 古典軌道上では作用の変分がゼロであることより,

$$\delta S = \int dt\ (i\eta\, \delta\dot{\eta} + i\delta\eta\, \dot{\eta}) = -2i \int dt\, \dot{\eta}\, \delta\eta = 0 \tag{5.54}$$

がなりたつ. ただし部分積分を実行した. この結果, 次の一階微分方程式,

$$\dot{\eta} = 0 \tag{5.55}$$

が得られる.

もう少し複雑な作用を考えると (5.53) にはないような任意性があらわれる．$K(t)$ を a 数の外場とすると，作用は，

$$\mathcal{L} = i\eta\,\dot{\eta} - i\eta K \tag{5.56}$$

となる．(5.56) の作用を変分すると運動方程式，

$$\dot{\eta} = \tfrac{1}{2}K \tag{5.57}$$

が得られる．しかしながら，もし (5.56) の二項目で K と η の順番が逆ならば，運動方程式は，

$$\dot{\eta} = -\tfrac{1}{2}K \tag{5.58}$$

となる．このような任意性があるので，それを決める規約をつくらなければならない．その規約とは，第一に作用は全て c 数であると仮定する．すなわち作用はグラスマン数の二次の項あるいはそれらの積からなる項のみを含む．第二に，グラスマン変数の微分は全てそれが含まれる項の一番右に置くことにする．第三に，a 数あるいは c 数の外場が含まれる項では全てのグラスマン変数はその外場の左に置くことにする．

運動方程式を系統的に取り扱うために，グラスマン変数に関する汎関数微分を定義しなければならない．もし $\mathcal{F}[\eta]$ が $\eta(t)$ の汎関数ならば，$\mathcal{F}$ の汎関数微分は，

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\eta(t)} \equiv \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\mathcal{F}[\eta(\tau) + \varepsilon\delta(\tau - t)] - \mathcal{F}[\eta]\right) \tag{5.59}$$

と定義される．ただし ε は定数 (時間に依存しない) グラスマン数である．変分が (5.1) に矛盾しないことより，汎関数の変分は，

$$\delta\mathcal{F} = \int dt\,\delta\eta_i(t)\,\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\eta_i(t)} \tag{5.60}$$

となる．

(1.54) に相当するラグランジアン密度を構成すれば，グラスマン変数の系でのハミルトンの運動方程式が得られる．η に対する正準運動量を ρ とする

と, ラグラジアン密度は一般的に,

$$\mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}) = \rho\dot{\eta} - H(\rho, \eta) \tag{5.61}$$

と書ける. ただし $H(\rho, \eta)$ は系のハミルトニアンである. (5.61) でのグラスマン変数の並ぶ順番は先ほど決めた規約に従う. 汎関数微分の定義を使うと,

$$\delta S = \int dt \left[\delta\rho \left(\dot{\eta} - \frac{\partial H}{\partial \rho}\right) + \delta\eta \left(\dot{\rho} - \frac{\partial H}{\partial \eta}\right)\right] \tag{5.62}$$

が得られる. したがって, ハミルトンの運動方程式は,

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = \frac{\partial H}{\partial \rho} \tag{5.63}$$

となる. グラスマン変数とc数変数のハミルトンの運動方程式の符号の違いは, ρ と $\dot{\eta}$ の反可換性から必然的に出てくるものだ. (5.61) より,

$$\rho = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \tag{5.64}$$

が得られる.

例題 5.14: ハミルトンの運動方程式と (5.64) から, グラスマン変数系で以下の通常のオイラー・ラグランジュ方程式が得られることをしめせ.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0\,. \tag{5.65}$$

そして, ハミルトニアンが

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{5.66}$$

を満たすことをしめせ.

グラスマン変数の系ではポアッソン括弧は,

$$\{A, B\}_{\rho,\eta} \equiv \frac{\partial A}{\partial \eta_j}\frac{\partial B}{\partial \rho_j} + \frac{\partial A}{\partial \rho_j}\frac{\partial B}{\partial \eta_j} \tag{5.67}$$

と定義され, **反括弧** (antibracket) と呼ばれている. この定義はc数で書かれた古典力学に対する以下の結果に一致するようにしてある.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \dot{\eta}\frac{\partial A}{\partial \eta} + \dot{\rho}\frac{\partial A}{\partial \rho} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\}_{\rho,\eta}\,. \tag{5.68}$$

反括弧は, 対称か反対称かをその二つの引数 A と B に依存するという特異な性質を持っている. A と B をグラスマン数の積からなるc数であるとすと, それらをグラスマン数 ρ あるいは η で微分したものはa数となる. したがって,

$$\{A, B\}_{\rho,\eta} = -\{B, A\}_{\rho,\eta} \tag{5.69}$$

がなりたつ. これ以外の場合は全て,

$$\{A, B\}_{\rho,\eta} = \{B, A\}_{\rho,\eta} \tag{5.70}$$

となる. これにより, H はc数であると仮定しているので, もし A が c数ならば $\{A, H\}$ は反対称で, A が a数ならば対称である. η_j と ρ_k のポアッソンの反括弧は,

$$\{\eta_j, \rho_k\}_{\rho,\eta} = \delta_{jk} \tag{5.71}$$

で与えられ, 対称てある.

重要な系の例として, グラスマン変数の調和振動子を考える. この系の作用は二つの実グラスマン変数η_1 と η_2 を使って次のように書ける.

$$\mathcal{L} = i\,\eta_1\dot{\eta}_1 + i\,\eta_2\dot{\eta}_2 - 2i\,\omega\eta_1\eta_2 \,. \tag{5.72}$$

ただし ω は c数の定数である. オイラー・ラグランジュ方程式から次の二つの運動方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \omega\eta_2 \,, \\ \dot{\eta}_2 &= -\omega\eta_1 \,. \end{aligned} \tag{5.73}$$

この二つの一階微分方程式から, 次式が得られる.

$$\ddot{\eta}_j = -\omega^2\eta_j \,, \;\; j = (1, 2) \,. \tag{5.74}$$

これは調和振動子の運動方程式である. 以上は, 一つの二階微分演算子を, グラスマン変数を使って二つの一階微分演算子の積に分解する簡単な例になっ

ている. (5.64) を使うと, 運動量は,

$$\rho_j = i\eta_j \tag{5.75}$$

となる. ゆえにハミルトニアンは,

$$H = i\omega\eta_1\eta_2 \tag{5.76}$$

となる. 運動量が (5.75) で与えられているとき, (5.76) の η_j を$-i\rho_j$ で置き換えるかどうかという任意性がハミルトンアンにでてくる. この困難は, η_j と ρ_j が独立でないことより生じたものであり, 一階微分方程式であらわされる系ではこれらの変数を独立にすることはできない. このようなときはポアッソン反括弧がうまく働くために, ρ_j と η_j の間の次のような関係を考慮しなければならない.

$$\frac{\partial H}{\partial \rho_1} = \omega\eta_2\ , \quad \frac{\partial H}{\partial \rho_2} = -\omega\eta_1\ . \tag{5.77}$$

最後に, この系の作用は複素変数 $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ を導入するときわめて簡単に書くことができることをしめしておく. このとき作用は,

$$\mathcal{L} = i\eta^*\dot{\eta} - \omega\,\eta^*\eta \tag{5.78}$$

となる. η に対する正準運動量は $\rho = i\eta^*$ となる. 複素変数を導入するもう一つの利点に, ハミルトニアン $H = -i\rho\eta$ に任意性があらわれないことがある. 次の節では, 量子力学系でこの作用を量子化する.

5.4　グラスマン変数の量子力学

この節では, グラスマン変数であらわされた量子力学を紹介する. 6 章でフェルミオンの場の理論について詳しく議論するが, この節と次の節で紹介するアイデアは 6 章での議論に必要である. 5.5節では, この節での結果を使って簡単な反対称系の遷移振幅の経路積分表示を構成する. それらの結果の多くをフェルミオンの場の理論でも使う.

グラスマン変数の系を量子化するには, 5.3節の古典力学形式をヒルベルト空間上の演算子の理論に焼き直さなければならない. これは結局, 演算子 $\mathcal{N}_j$ をグラスマン座標 η_j に対応させることに相当する. 正準運動量 $i\mathcal{P}_j$ を定義した後, 次の反交換関係を仮定して系を量子化する.

$$\{\mathcal{N}_j, \mathcal{P}_k\} = \delta_{jk}\ . \tag{5.79}$$

ただし反交換関係は古典的ポアッソン括弧の持つ対称性に一致するように選んだ.

(5.79) の関係式は, 系の演算子が従うべき代数をつくる. この代数から, $\mathcal{N}_j^2 = \alpha_j^2$ (ただし α_j はc数) がすぐに得られる. もし $\alpha_j \neq 0$ ならば, 演算子 $\mathcal{N}_j$ は二つの固有値 $\pm\alpha_j$ しか持たないことは簡単にしめせる. もし $\alpha_j = 0$ ならば, $\mathcal{N}_j$ のゼロでない固有値はすべてグラスマン数になり, 演算子 $\mathcal{N}$ は $\mathcal{N}^2 = 0$ なので**巾ゼロ** (nilpotent) であると言う.

まず $\alpha_j = 0$ で, 簡単のため一自由度の系を考える. α_j がゼロでないときはこの節の最後の例で取り扱う. 演算子を $\mathcal{N}$ であらわすと, 先程の議論よりこの演算子の固有値はグラスマン数にならなければならない. 固有状態を $|\eta\rangle$ とし,

$$\mathcal{N}\,|\eta\rangle = \eta\,|\eta\rangle \tag{5.80}$$

がなりたっていると仮定する. ただし η はグラスマン数である. 固有状態 $|\eta\rangle$ は内積 $\langle\eta'\,|\,\eta\rangle$ を持つ. しばらくの間, この内積とその複素共役のもとでの振舞いはわからないものとする. しかしながら, それらの持つ性質の一部は導きだすことができる. もっと複雑な系でも, 内積は状態の引数の関数の形をしていなければならない. K を別のグラスマン変数とすると,

$$K\langle\eta\,|\,\eta'\rangle = \langle -\eta\,|\, -\eta'\rangle K \tag{5.81}$$

がなりたつ. これにより, グラスマン数の状態間の内積は他のグラスマン変数とは交換しないことがすぐにわかる.

一変数 η の場合, 双対空間は, $|\eta'\rangle$ を a数あるいは 関数に写像する 線形汎関数f_η: $|\eta'\rangle \mapsto f_\eta$ 全ての集合であると仮定する. グラスマン変数のせいで写像が次のように反線形になる.

$$f_\eta : \eta_1\,|\eta_2\rangle \mapsto \eta_1 f(\eta,\eta_2) = f(-\eta,-\eta_2)\,\eta_1 \tag{5.82}$$

c 数のときのように, これらの線形汎関数は内積に相当するものと考えると,

$$f_\eta : \eta_1\,|\eta_2\rangle \mapsto \eta_1\langle\,\eta\,|\,\eta_2\,\rangle = \langle\,-\eta\,|\,-\eta_2\,\rangle\eta_1 \tag{5.83}$$

となる. ただし汎関数の反線形性のために, 双対状態 (ブラ) とグラスマン数の順序を変えるための規約を選ぶ必要がある. 以下では, グラスマン数を左側に置く左規約をとることにする. η が実数のとき, $\mathcal{N}$ はエルミートであると考えられる. ゆえに これは以下のように双対空間に作用する.

$$\langle\eta|\,\eta = (\mathcal{N}\,|\eta\rangle)^\dagger = \langle\eta|\,\mathcal{N}^\dagger = \langle\eta|\,\mathcal{N}\,. \tag{5.84}$$

(5.84) のように $\mathcal{N}$ がエルミートであることと, 左規約を使って,

$$\left\langle\eta'\right|\mathcal{N}\,|\eta\rangle = \eta\langle\,\eta'\,|\,\eta\,\rangle = \eta'\langle\,\eta'\,|\,\eta\,\rangle \tag{5.85}$$

となる. ゆえに,

$$(\eta'-\eta)\langle\,\eta'\,|\,\eta\,\rangle = 0 \tag{5.86}$$

となる. グラスマン代数の性質を使うと, (5.86) の関係式から内積は$(\eta-\eta')$に比例していることがわかる. 簡単のため比例定数は 1 とする. ゆえに,

$$\langle\,\eta'\,|\,\eta\,\rangle = \eta - \eta' \tag{5.87}$$

となる. (5.87) とグラスマン変数のデルタ関数 (5.32) を比較すると, グラスマン数の状態は, 2.1 節で (2.4) のようにあらわした c数の状態の直交性と同じように直交していることがわかる. この結果,

$$\langle\,\eta'\,|\,\eta\,\rangle^* = -\langle\,\eta\,|\,\eta'\,\rangle = \langle\,-\eta\,|\,-\eta'\,\rangle \tag{5.88}$$

が得られる．さらに，状態 $|\eta\rangle$ は $\langle\eta\,|\,\eta\rangle = 0$ なのでゼロノルムをもつ．ノルムがゼロあるいは負である状態を**ゴースト** (ghost) と言う．ヒルベルト空間にゴーストがあると，量子過程からゴーストを追い出すことができないかぎり量子力学の確率解釈は危うくなる．もし追い出すことができないなら，その理論は病的なものとして捨てなければならない．これについては，7 章でゲージ理論のユニタリー性について解析する際に詳しく議論する．

状態 $|\eta\rangle$ は完全であると仮定する．このことは，次で定義される演算子 P_η が単位射影演算子であることを意味する．

$$P_\eta = \int d\eta\ |\eta\rangle\,\langle\eta| = 1\ . \tag{5.89}$$

これまでの結果を使うと，

$$\begin{aligned} P_\eta^\dagger &= \int |\eta\rangle\,\langle\eta|\ (d\eta)^* = -\int |\eta\rangle\,\langle\eta|\ d\eta \\ &= -\int d\eta\ |-\eta\rangle\,\langle-\eta| = \int d\eta\ |\eta\rangle\,\langle\eta| = P_\eta \end{aligned} \tag{5.90}$$

と変形していくことができ，P_η がエルミートであることがわかる．

> **例題 5.15**: 完全性の関係式 (5.89) を証明するために，(5.87) の内積を使って次の式をしめせ．
>
> $$\langle\,\eta_1\,|\,\eta_2\,\rangle = \int d\eta\,\langle\,\eta_1\,|\,\eta\,\rangle\langle\,\eta\,|\,\eta_2\,\rangle\ . \tag{5.91}$$

より自由度の多い系にこれらの結果を一般化するのはたやすいことではない．$\mathcal{N}_1$ および $\mathcal{N}_2$ を巾ゼロ演算子とし，$|\eta_1,\eta_2\rangle$ をこれらの演算子の**同時**固有状態であるとする．そうすれば，

$$\{\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\} = 0 \tag{5.92}$$

がなりたつ．すなわち，これらの演算子の反交換子はゼロになるのである．この節の二番目の例でこのような場合の内積を構成する方法を与える．

K を任意のグラスマン変数とすると, $\mathcal{N}$ と K との反交換関係は,

$$\left\langle \eta' \middle| \{K, \mathcal{N}\} \middle| \eta \right\rangle = K(\eta - \eta')\langle \eta' \,|\, \eta \rangle = 0 \tag{5.93}$$

となる. ただし(5.87) を使った. この結果より, $\{K, \mathcal{N}\} = 0$ である. さらに, 全ての c数の変数は内積および演算子と交換する.

古典的なレベルでまったく別のグラスマン変数 η と ρ の系では, c数の量子力学と非常に似たグラスマン変数の量子力学を構成できる. 簡単のため, 再び一自由度のみの系を考える. $\mathcal{N}$ はグラスマン数の位置演算子であり, $i\mathcal{P}$ は正準運動量演算子であるとする. ただし $i\mathcal{P}$ はエルミートな演算子であるとする. ポアッソンの反括弧 (5.71) は η および ρ に対して対称であり, 古典力学のポアッソン括弧から量子力学の演算子間の代数に移行できるということから, $\mathcal{N}$ と $i\mathcal{P}$ は次の対称的な**反交換関係** (anticommutator) を満たすと考えられる.

$$\{\mathcal{N}, i\mathcal{P}\} \equiv i\mathcal{N}\mathcal{P} + i\mathcal{P}\mathcal{N} = i \;\; \Rightarrow \{\mathcal{N}, \mathcal{P}\} = 1\,. \tag{5.94}$$

$\mathcal{P}$ の固有状態を $|\rho\rangle$ と書くと,

$$\mathcal{P}\,|\rho\rangle = \rho\,|\rho\rangle \tag{5.95}$$

がなりたつ. (5.87) と同様の内積,

$$\langle \rho' \,|\, \rho \rangle = \rho - \rho' \tag{5.96}$$

が存在する. そして, 完全性の関係,

$$\int d\rho\, |\rho\rangle\, \langle\rho| = 1 \tag{5.97}$$

がなりたっていると考える.

ここまでに導いた規則を使うと, (5.94) の代数の関係から,

$$\eta' - \eta = \langle\eta|\,\{\mathcal{N}, \mathcal{P}\}\,\left|\eta'\right\rangle = (\eta - \eta')\,\langle\eta|\,\mathcal{P}\,\left|\eta'\right\rangle \tag{5.98}$$

となり,

$$\langle\eta|\,\mathcal{P}\,\left|\eta'\right\rangle = -1 = \frac{\partial}{\partial\eta}\langle\,\eta\,|\,\eta'\,\rangle \tag{5.99}$$

が得られる. (5.99) を使って次のように変形していける.

$$\begin{aligned}\rho\langle\eta\,|\,\rho\rangle = \langle\eta|\,\mathcal{P}\,|\rho\rangle &= \int d\eta'\;\langle\eta|\,\mathcal{P}\left|\eta'\right\rangle\langle\eta'\,|\,\rho\rangle \\ &= -\int d\eta\,\langle\,\eta\,|\,\rho\,\rangle = -\frac{\partial}{\partial\eta}\langle\,\eta\,|\,\rho\,\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.100}$$

ただしグラスマン変数の積分と微分が同等であることを利用した. (5.100) の微分方程式は, 係数に i がない以外は通常の量子力学のものと同じ形をしている. このような系では, グラスマン変数での量子力学の位置表示は,

$$\mathcal{N}\to\eta\,,\;\;\mathcal{P}\to\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{5.101}$$

となる. これは, (5.37) も満たしている. (5.100) の解は,

$$\langle\,\eta\,|\,\rho\,\rangle = e^{\eta\rho} \tag{5.102}$$

で与えられる. これはグラスマン変数での平面波に相当するものである.

例題 5.16: (5.102) を使って, (5.97) の完全性の関係式を確かめよ.

グラスマン関数に射影するような状態を定義することが可能である. このような状態の双対ベクトルを $\langle f|$ と書くと, これは1自由度の固有状態 $|\eta\rangle$ の線形汎関数になる.

$$\langle\,f\,|\,\eta\,\rangle = f_c^* + f_a^*\eta\,. \tag{5.103}$$

ただし f_c および f_a は c 数である. このような状態間の内積は,

$$\langle\,f\,|\,h\,\rangle = \int d\eta\,\langle\,f\,|\,\eta\,\rangle\langle\,\eta\,|\,h\,\rangle = f_a^*h_c + f_c^*h_a \tag{5.104}$$

で与えられる. これをみると, $\langle\,f\,|\,f\,\rangle \le 0$ となる f_a および f_c の値が存在することがわかる. したがって, これらの状態はゴーストになる可能性がある.

グラスマン変数での量子力学は古典的ハミルトニアン H で次の置き換えをすればよい.

$$\eta\to\mathcal{N}\,,\;\;\rho\to i\mathcal{P}\,. \tag{5.105}$$

ただし η と ρ が互いにまったく独立な場合にかぎる. シュレディンガー表示では, $|\psi\rangle_S$ の時間発展は,

$$H(\mathcal{N},\mathcal{P})\,|\psi,t\rangle_S = i\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi,t\rangle_S \tag{5.106}$$

となると考えられる. もし古典的ハミルトニアンが実 c 数ならば, η と ρ を代入して得られたハミルトニアン H はエルミートであり, $H^\dagger = H$ がなりたつ. このような場合, シュレディンガー方程式は,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\,{}_S\langle\psi,t| = -{}_S\langle\psi,t|\,H^\dagger(\mathcal{N},\mathcal{P}) = -{}_S\langle\psi,t|\,H(\mathcal{N},\mathcal{P}) \tag{5.107}$$

となる.

このとき, ハイゼンベルク表示での物理量の時間発展を導くことができる. ハイゼンベルク表示での物理量 O_H は, 次の関係式に従う.

$${}_H\langle\psi|\,O_H(t)\,|\psi\rangle_H = {}_S\langle\psi,t|\,O_S\,|\psi,t\rangle_S \tag{5.108}$$

O_S があらわに時間に依存しないとすると, 両辺を微分してシュレディンガー方程式を使い,

$$i\frac{\partial}{\partial t}O_H = O_H H - HO_H = [O_H, H] \tag{5.109}$$

が得られる.

以下でグラスマン変数の量子力学の例として, 二つの簡単な作用を解析する. これらの例はドウィット (DeWitt) の本 [2] にある.

5.4.1 自由粒子

はじめに考える作用は, $\mathcal{L} = i\eta\dot{\eta}$ だ. η を実数とし, 正準運動量は $\rho = i\eta$ で与えられる. 反交換関係 (5.94) は,

$$\{\mathcal{N},\mathcal{N}\} = 1 \Rightarrow \mathcal{N}^2 = \frac{1}{2} \tag{5.110}$$

となる. ゆえにこの作用は, この節のはじめで紹介した $\alpha_j \neq 0$ の場合に相当する. $\mathcal{N}$ と $\mathcal{P}$ が独立でないことより, (5.110) が導かれた. (5.110) は単に拘

束条件と考えることができる．このとき，この量子系で物理的に許される状態 $|P\rangle$ は，

$$\mathcal{N}^2\,|P\rangle = \tfrac{1}{2}\,|P\rangle \tag{5.111}$$

を満たしていなければならない．

逆に言えば，上の式によって $\mathcal{N}$ が c 数を固有値に持つ固有状態を持つことになる．ゆえに，この節の前半で議論した状態 $|\eta\rangle$ は $\mathcal{N}$ の固有状態では**ない**．$|\alpha\rangle$ が実 c 数の固有値 α を持つ $\mathcal{N}$ の固有状態であるなら，

$$\mathcal{N}^2\,|\alpha\rangle = \alpha^2\,|\alpha\rangle \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{5.112}$$

となる．ゆえに $\mathcal{N}$ の固有状態は二つあり，それらをそれぞれ固有値 $+\sqrt{2}/2$ および $-\sqrt{2}/2$ に対応して $|+\rangle$ および $|-\rangle$ と書く．これらの状態はどちらもグラスマン数の状態 $|\eta\rangle$ と内積をとるとグラスマン関数が得られる．このような場合，拘束条件 $\mathcal{N}^2 = 1/2$ は5.9節の結果を使って次のようにあらわされる．

$$\langle\eta|\,\mathcal{N}^2\,|\pm\rangle = \frac{1}{2}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta}\eta\right)f_\pm(\eta) \tag{5.113}$$

この式より位置表現，

$$\mathcal{N}^2 = \frac{1}{2}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta}\eta\right) = \left(\eta + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 \tag{5.114}$$

が得られ，ゆえに，

$$\mathcal{N} = \eta + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{5.115}$$

も得られる．

今や $\mathcal{N}$ の固有関数を求めることはたやすい．固有関数は，

$$\left(\eta + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)f_\pm(\eta) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}f_\pm(\eta) \tag{5.116}$$

を満たしている．よって，簡単な計算から，

$$f_+(\eta) = \langle\,\eta\,|+\,\rangle = \frac{1+\sqrt{2}\,\eta}{\sqrt{2\sqrt{2}}}\,,\quad f_-(\eta) = \langle\,\eta\,|-\,\rangle = \frac{1-\sqrt{2}\,\eta}{\sqrt{2\sqrt{2}}} \tag{5.117}$$

が得られる．二つの異なる状態が直交することをみるのは難しくない．(5.117) で使った規格化のもとでは，

$$\langle \pm | \pm \rangle = \int d\eta\, f_\pm^*(\eta) f_\pm(\eta) = \pm 1 \tag{5.118}$$

となる．$|-\rangle$ は負ノルムのゴースト状態に対応している．負ノルム状態があると困難が生じるが，その困難の解決法をここでは述べない．

5.4.2 調和振動子

二番目の例として，複素数で書かれた作用 $\mathcal{L} = i\mathcal{N}^\dagger \dot{\mathcal{N}} + \omega \mathcal{N}^\dagger \mathcal{N}$ を持つ調和振動子を考える．ただし $\mathcal{N}^\dagger$ は η^* を演算子に拡張したものだ．$\mathcal{N}$ の正準運動量は $i\mathcal{N}^\dagger$ であるので，二つの座標は次の反交換関係を満たす．

$$\{\mathcal{N}, \mathcal{N}^\dagger\} = 1\ . \tag{5.119}$$

この他に，$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}^{\dagger 2} = 0$ という拘束条件も持つ．$\mathcal{N}$ と $\mathcal{N}^\dagger$ の反交換関係がゼロでないので，この両方の演算子に対して同時固有状態になっているような状態を見つけることはできない．また，$\mathcal{N}^\dagger = \mathcal{P}$ に反するので，演算子を (5.101) のように位置表現することもできない．

このため，$\mathcal{N}$ の固有状態を考えるかわりに，ハミルトニアン，

$$H = \omega \mathcal{N}^\dagger \mathcal{N} \tag{5.120}$$

の固有状態を考える．その際に使われる手法は量子場の理論においてきわめて重要である．ハイゼンベルク表示では，座標 $\mathcal{N}$ は次の運動方程式に従っていなければならない．

$$\dot{\mathcal{N}} = -i[\mathcal{N}, H] = -i\omega \mathcal{N}\ . \tag{5.121}$$

この方程式の解および反交換関係は**モード展開** (mode expansion) により得られる．モード展開では，演算子は運動方程式の c数解と (反) 交換関係を満たす別の演算子との組み合わせで書ける．(5.121) の c数解は $\exp(-i\omega t)$ しかない．ゆえに，$\mathcal{N}$ および $\mathcal{N}^\dagger$ のモード展開は，

$$\mathcal{N} = a e^{-i\omega t}\ ,\ \ \mathcal{N}^\dagger = a^\dagger e^{i\omega t} \tag{5.122}$$

となる. ただし a および $a^\dagger$ は時間に依存しない演算子で,

$$a^2 = a^{\dagger 2} = 0\,,\ \ \{a, a^\dagger\} = 1 \tag{5.123}$$

を満たす. (5.122) は (5.123) を使うと運動方程式と反交換関係の両方を満たす. そしてハミルトニアンは時間に依存しない形 $H = \omega a^\dagger a$ にとることができ, これは4.4節の調和振動子のものに一致している. (5.123) の代数は以前と異なってはいるが, 4.4節でエネルギー固有値を求めたのと同様の方法を使うことができる. 次の性質を持つ基底状態 $|0\rangle$ を導入する.

$$a\,|0\rangle = 0\,,\ \ \langle\, 0\,|\, 0\,\rangle = 1\ . \tag{5.124}$$

したがって, ここでも a は消滅演算子の役割を果たしている. 状態 $|1\rangle$ は次で構成される.

$$|1\rangle = a^\dagger\,|0\rangle\ . \tag{5.125}$$

反交換関係 (5.123) から $\langle\, 1\,|\, 1\,\rangle = 1$ および$\langle\, 1\,|\, 0\,\rangle = 0$ がわかる. そして, $a^{\dagger 2} = 0$ なので, この理論には他の状態は存在しない. これらの状態のエネルギー固有値は,

$$H\,|0\rangle = 0\,,\ \ H\,|1\rangle = \omega\,|1\rangle \tag{5.126}$$

で与えられる.

グラスマン変数の調和振動子には一つの励起状態しか存在しないので, c数での調和振動子とは根本的に違う. 系のエネルギー準位には ω を単位として 0 かあるいは 1 ある状態しかない. この意味でグラスマン変数の調和振動子は**フェルミオン的**である. 一方, 4.4節での調和振動子は任意の数の ω が一つの状態にあることができるので**ボソン的**である. 前者は, 基底状態および励起状態を位置表示ではグラスマン関数の形で書ける. 演算子 $\mathcal{N}$ と $\mathcal{N}^\dagger$ は一つの複素グラスマン変数η を使って,

$$\mathcal{N} = \eta + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta^*}\,,\ \ \mathcal{N}^\dagger = \eta^* + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{5.127}$$

と書ける. そして二つのエネルギー固有関数はグラスマン関数を使って,

$$f_0(\eta^*,\eta) = \langle\,\eta,\eta^*\,|\,0\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\eta^*+2\eta^*\eta\right)$$
$$f_1(\eta^*,\eta) = \langle\,\eta,\eta^*\,|\,1\,\rangle = \frac{1}{2}\left(1+2\sqrt{2}\eta-2\eta^*\eta\right) \tag{5.128}$$

と書ける. ただしこれはグラスマン変数の測度 $d\eta\, d\eta^*$ で規格化してある.

例題 5.17: (5.127) および (5.128) を確かめよ.

(5.128) から内積が決定でき,

$$\begin{aligned}\langle\,\eta,\eta^*\,|\,\eta',\eta'^*\,\rangle &= \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\eta+\eta^*+\eta'+\eta'^*)+\eta^*\eta'+2\eta\eta'^* \\ &\quad +\sqrt{2}(\eta^*\eta'\eta'^*+\eta\eta^*\eta')-\sqrt{2}(\eta\eta'\eta'^*+\eta\eta^*\eta'^*) \\ &\quad +3\eta\eta^*\eta'\eta'^* \end{aligned} \tag{5.129}$$

および,

$$\int d\eta\, d\eta^*\ \ |\eta,\eta^*\rangle\,\langle\eta,\eta^*| = 1 \tag{5.130}$$

が得られる.

例題 5.18: (5.129) および (5.130) を確かめよ.

5.5 グラスマン変数による経路積分

この節では, 5.4節で解析したフェルミオン的な調和振動子に対応するグラスマン的コヒーレント状態間の量子的遷移振幅を導き, これまでの節での結果を使って計算する. 次の節では, フェルミオン的調和振動子をボソン的調和振動子と結びつけて**超対称** (supersymmetric) 量子力学を得る.

この節全体を通して, 議論は5.4節のフェルミオン的調和振動子に限る. まず, フェルミオン的コヒーレント状態を定義することから出発する. これはグラスマン変数を使う以外は, 4.4節のボソン的コヒーレント状態と同じように

できる. (5.123) の生成消滅演算子と (5.124) の基底状態 $|0\rangle$ を使うとコヒーレント状態は,

$$|\eta\rangle = \exp\left(\eta a^\dagger + \eta^* a\right)|0\rangle \tag{5.131}$$

と書ける. ここで η は複素グラスマン変数である. この定義より, 二つのコヒーレント状態の内積や, 生成消滅演算子の期待値は簡単に求まる. グラスマン変数のコヒーレント状態は, 4.4節の c数のコヒーレント状態の持つ性質と良く似た性質をたくさん持っている. それらは次のようなものである.

$$\langle \eta \,|\, \xi \rangle = \eta^*\xi + \left(1 + \tfrac{1}{2}\eta\eta^*\right)\left(1 + \tfrac{1}{2}\xi\xi^*\right) \tag{5.132}$$

$$\int d\eta\, d\eta^*\; |\eta\rangle\langle\eta| = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \equiv 1 \tag{5.133}$$

$$\langle\eta|\, a^\dagger\, |\xi\rangle = \eta^*\left(1 + \tfrac{1}{2}\xi\xi^*\right) = \eta^*\langle \eta \,|\, \xi \rangle \tag{5.134}$$

$$\sum_{n=0}^{1}\langle\, n \,|\, \eta \,\rangle\langle\, \xi \,|\, n \,\rangle = \exp\left(\tfrac{1}{2}\eta\eta^* + \tfrac{1}{2}\xi\xi^* + \eta\xi^*\right) \tag{5.135}$$

$$\langle\eta|\, a^\dagger a\, |\xi\rangle = \eta^*\xi = \eta^*\xi\langle\, \eta \,|\, \xi \,\rangle\,. \tag{5.136}$$

例題 5.19: (5.132) から (5.136) までの式を確かめよ.

例題5.19の結果より, 二つの瞬間的なフェルミオン的コヒーレント状態間の遷移振幅の経路積分表示を導くことができる. (5.133) と2.1節での技法を組み合わせると,

$$\langle\, \eta_b, t_b \,|\, \eta_a, t_a \,\rangle =$$
$$\int \mathcal{D}\eta\, \langle\, \eta_b, t_b \,|\, \eta_{N-1}, t_{N-1} \,\rangle\, \langle \eta_{N-1}, t_{N-1}| \cdots |\eta_1, t_1\rangle\, \langle\, \eta_1, t_1 \,|\, \eta_a, t_a \,\rangle \tag{5.137}$$

となる. ただし (5.137) の測度は,

$$\mathcal{D}\eta = \prod_{j=1}^{N-1} d\eta_j d\eta_j^* \tag{5.138}$$

で与えられ, $t_{j+1} - t_j = \epsilon$ である. N 個の無限小行列要素はそれぞれハミルトニアン $H = \omega a^\dagger a$ と (5.136) の結果を使って次のように得られる.

$$\langle\, \eta_{j+1}, t_{j+1} \,|\, \eta_j, t_j \,\rangle =$$

$$\langle \eta_{j+1} | \, e^{-i\epsilon H} \, | \eta_j \rangle \approx \exp(-i\epsilon\omega\eta^*_{j+1}\eta_j) \langle \, \eta_{j+1} \, | \, \eta_j \, \rangle \, . \tag{5.139}$$

最後に, $\eta_{j+1} - \eta_j = \epsilon \, \dot{\eta}_j$ とし, $O(\epsilon^2)$ の項を全て落とすと, 行列要素は,

$$\langle \, \eta_{j+1} \, | \, \eta_j \, \rangle \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon\eta^*_j\dot{\eta}_j + \frac{1}{2}\epsilon\dot{\eta}^*_j\eta_j = \exp\Big[-\epsilon\frac{1}{2}(\eta^*_j\dot{\eta}_j - \dot{\eta}^*_j\eta_j)\Big] \tag{5.140}$$

と書ける.

> **例題 5.20**: (5.140) を確かめよ.

結局, $N \to \infty$ の極限で完全な遷移要素は,

$$\langle \, \eta_b, t_b \, | \, \eta_a, t_a \, \rangle = \int_{\eta_a}^{\eta_b} \mathcal{D}\eta \, \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \, \left[\frac{1}{2} i\eta^*\dot{\eta} - \frac{1}{2} i\dot{\eta}^*\eta - \omega\eta^*\eta \right] \right\} \tag{5.141}$$

となる. ただし積分の範囲は $\eta_0 = \eta_a$ および$\eta_N = \eta_b$ とした. ここで再びなじみ深い経路積分の形があらわれた. しかしこれには, 作用の中の時間微分が対称化されているというわずかな違いがあり, これは重要である.

できるだけ2.3節のc数の調和振動子で計算したのと同じように(5.141)の経路積分を評価するのは教訓的である. その手法では, 作用を古典的運動方程式のc数解の周りで $q = x + q_c$ のように展開し, q_c の境界条件を系の始状態および終状態にあうように選んだ. グラスマン振幅 (5.141) にこの手法を適用することはできない. 簡単のため $\omega \to 0$ とする. いまの場合運動方程式は一次なので, 初期および終状態の**両方**を運動方程式を満たすように同時にあわせることができない.

しかしながら, この方法でc数の調和振動子を評価する鍵の一つに, 揺らぎ x が初期および終状態の時刻でゼロになるということがある. グラスマン変数の系でもこの性質を持つように揺らぎを定義することは可能で, これにより作用は部分積分可能になる. このために次の変換をする.

$$\eta = \chi + \chi_c \, . \tag{5.142}$$

ただし, χ_c は,

$$\chi_c = \theta(t-\tau)\eta_b + \theta(\tau-t)\eta_a \tag{5.143}$$

で与えられる. ここで θ は(2.17) で定義される階段関数で, τ は時間間隔 (t_a, t_b) の間の任意の時刻である. 初期および終時刻で関数 χ_c はそれぞれの状態での値に等しくなるので χ は初期および終時刻でゼロになる. (2.19) から, χ_c の微分は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_c = (\eta_b - \eta_a)\delta(t-\tau) \tag{5.144}$$

で与えられる. (5.142) を代入して (5.141) を書き変えると,

$$\begin{aligned}\langle \eta_b, t_b \,|\, \eta_a, t_a \rangle &= \exp(\tfrac{1}{2}\eta_b^*\eta_a - \tfrac{1}{2}\eta_a^*\eta_b) \\ &\times \int_0^0 \mathcal{D}\chi \exp\left\{ i\int_{t_a}^{t_b} dt \left[\tfrac{1}{2}i\chi^*\dot{\chi} - \tfrac{1}{2}i\dot{\chi}^*\chi \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + i\chi^*(\eta_b-\eta_a)\delta(t-\tau) - i(\eta_b^*-\eta_a^*)\chi\delta(t-\tau) \right] \right\}\end{aligned} \tag{5.145}$$

が得られる.

次に, (5.52) を使うために, (5.145) にあらわれる作用を行列形で書くことにする. これには次の恒等式を使う.

$$\int dt\, \chi^*\dot{\chi} = \int dt\, dt'\, \chi^*(t)D(t-t')\chi(t')\ . \tag{5.146}$$

ただし, $D(t-t') = \frac{d}{dt}\delta(t-t')$ である. 次式は簡単にしめせる.

$$\int dt\, \theta(t_1 - t)D(t-t_2) = \delta(t_1 - t_2)\ . \tag{5.147}$$

この式より, $\theta(t'-t)$ は1.4節の汎関数行列形式の意味で $D(t-t')$ の逆になっている. これを使えば, (5.145) の経路積分を評価できる. これを例題としておく.

例題 5.21: (5.52) と $\theta(0) = \frac{1}{2}$ を使い, $\omega = 0$ での (5.145) の経路積分は次のように評価できることをしめせ.

$$\langle \eta_b, t_b \,|\, \eta_a, t_a \rangle = \exp(\eta_b^*\eta_a - \tfrac{1}{2}\eta_b^*\eta_b - \tfrac{1}{2}\eta_a^*\eta_a)\ . \tag{5.148}$$

例題 5.22: 同様の議論から, $\omega \neq 0$ のとき,

$$\langle \eta_b, t_b \,|\, \eta_a, t_a \rangle = \exp(\eta_b^* \eta_a e^{-i\omega(t_b - t_a)} - \frac{1}{2}\eta_b^* \eta_b - \frac{1}{2}\eta_a^* \eta_a) \tag{5.149}$$

となることをしめせ.

グラスマン数のモードを持つ分配関数は通常の定義より,

$$Z_\beta = \sum_n \langle n| e^{-\beta H} |n\rangle \tag{5.150}$$

となる. そしてこれは, 4.2節でボソンの場合でやったように, グラスマン変数の遷移振幅と結び付けることができる. グラスマン変数のコヒーレント状態の完全性より, (5.150) の分配関数は,

$$Z_\beta = \sum_n \int d\eta\, d\eta^* \,\langle\, n \,|\, \eta \,\rangle \langle \eta| e^{-\beta H} |n\rangle \tag{5.151}$$

と書ける. グラスマン変数の反交換性より,

$$Z_\beta = \int d\eta\, d\eta^* \sum_n \langle -\eta| e^{-\beta H} |n\rangle \langle\, n \,|\, \eta \,\rangle = \int d\eta\, d\eta^* \,\langle -\eta| e^{-\beta H} |\eta\rangle \tag{5.152}$$

が得られる. この分配関数は, 実時間グラスマン遷移振幅,

$$Z_{ab} = \langle -\eta| e^{-iH(t_b - t_a)} |\eta\rangle \tag{5.153}$$

で $t_b - t_a \to -i\beta$ と置き換え**反周期的** (antiperiodic) な初期および終わりの値を足し上げることにより得ることができる.

(5.149) および (5.153) の結果を用いると, フェルミオン振動子の分配関数は,

$$Z_\beta = 1 + e^{-\beta\omega} \tag{5.154}$$

で与えられる.

例題 5.23: (5.154) を確かめよ.

5.6　超対称量子力学

この節では, ボソン・フェルミオン対称性, つまり**超対称性** (supersymmetry) [5, 6] を持つ簡単な量子力学のモデルを紹介する. 現在までのところ, 自然界が超対称性を持つという直接的な実験的証拠はないが, 超対称性を持つようなモデルは説得力のある好ましい理論的性質を多く持つ [6]. しかしながら超対称性がなければ困るような問題はなく, この意味で超対称性は "問題を探し求めている解" だとも言われる. しかし, その人気はおとろえない. ここでは, その性質のうち簡単なものを超対称量子力学 [2, 7] の枠内でみることにする.

4.4節のボソン的な振動子と前の二つの節で議論したフェルミオン的な振動子をあわせ持つモデルから出発する. 作用は次で与えられている.

$$S = \int dt \left(\tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \tfrac{1}{2} i\eta^* \dot{\eta} - \tfrac{1}{2} i\dot{\eta}^* \eta - \omega\eta^*\eta \right) . \qquad (5.155)$$

ここではフェルミオンおよびボソン振動子は同じ基本的な振動数ω を持つようにとった. このフェルミオンセクターとボソンセクター間のエネルギーの縮退が超対称性を持つ**目安**になっている. (5.155) の作用は次の一連の変換 [2] で不変である.

$$\begin{aligned}
x &\to x + \delta x \equiv x - i\eta\delta\alpha^* - i\eta^*\delta\alpha \\
\eta &\to \eta + \delta\eta \equiv \eta + (m\dot{x} + im\omega x)\delta\alpha \\
\eta^* &\to \eta^* + \delta\eta^* \equiv \eta^* + (m\dot{x} - im\omega x)\delta\alpha^* \, .
\end{aligned} \qquad (5.156)$$

ただし $\delta\alpha$ は時間に依存しない無限小のグラスマン数である. $\delta\alpha$ の最低次のオーダーで (5.156) の変換の下で (5.155) の作用が不変かどうかをみるのはたやすい. しかしこれは, x と η が 各々の運動方程式$\ddot{x} = -\omega^2 x$ および $\dot{\eta} = -i\omega\eta$ を満たしているときのみ成立する.

この不変性と4.3節での結果を結び付けると, 二つの保存**チャージ**があることを導くことができる. これは次のことから直接わかる. 運動方程式を満た

す座標に対して,

$$\delta S = \int dt \, \frac{d}{dt} \left(\delta\eta_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i} + \delta x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \, . \tag{5.157}$$

がなりたつ. よって次の二つのチャージを得ることができる.

$$\begin{aligned} G &= (m\dot{x} + im\omega x)\, \eta \, , \\ G^\dagger &= (m\dot{x} - im\omega x)\, \eta^* \, . \end{aligned} \tag{5.158}$$

運動方程式を使えば, $\dot{G} = \dot{G}^\dagger = 0$ をしめすのは難しくない.

(5.158) のチャージは古典的ラグランジアンから導かれた. これは2.1節で定義されたボソンの演算子 Q と P および 5.4節で定義されたフェルミオンの演算子 $\mathcal{N}$ と $\mathcal{P}$ を使って演算子にできる. これにより,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (P + im\omega Q)\, \mathcal{N} \, , \\ \mathcal{G}^\dagger &= (P - im\omega Q)\, \mathcal{P} \end{aligned} \tag{5.159}$$

が得られる. 演算子 Q と P は $\mathcal{N}$ および $\mathcal{P}$ と交換するものと考えられる. このことは (5.159) の二つの演算子が巾ゼロ, つまり $\mathcal{G}^2 = \mathcal{G}^{\dagger 2} = 0$ であることから確かめられる. これらの二つの演算子は次のような意味で (5.156) の超対称変換を**生成**する.

$$\begin{aligned} [Q, \mathcal{G}] &= i\mathcal{N} \\ [Q, \mathcal{G}^\dagger] &= i\mathcal{P} \\ \{\mathcal{N}, \mathcal{G}^\dagger\} &= P - im\omega Q \, . \end{aligned} \tag{5.160}$$

(5.159) の演算子の反交換関係は,

$$\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^\dagger\} = P^2 + m^2\omega^2 Q^2 + 2m\omega \mathcal{P}\mathcal{N} = 2mH \tag{5.161}$$

で与えられる. この結果は, 超対称性の持つ一般的な性質である. つまり, 超対称変換の生成子の交換子は時間推進（場の理論の場合は空間推進も含まれる）の生成子, つまりハミルトニアン（空間推進のときは運動量）となる.

運動方程式の解に対する制限は, c 数の**補助** (auxiliary) 座標 z を作用に次のように導入して取り除くことができる.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}i\eta^*\dot{\eta} - \frac{1}{2}i\dot{\eta}^*\eta - \omega\eta^*\eta - \frac{1}{2}z^2 \,. \tag{5.162}$$

次の変分の結果,

$$\begin{aligned} \delta x &= i\eta\,\delta\alpha^* + i\eta^*\,\delta\alpha \\ \delta\eta &= (m\dot{x} + im\omega x + z)\delta\alpha \,, \\ \delta z &= -(i\dot{\eta}^* - \omega\eta^*)\delta\alpha - (i\dot{\eta} + \omega\eta)\delta\alpha^* \end{aligned} \tag{5.163}$$

ラグランジアンには次のような全微分項がでてくる.

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \frac{dF}{dt} \,, \\ &F = \frac{1}{2}i(m\dot{x} + im\omega x + z)\eta\,\delta\alpha^* + \frac{1}{2}i(m\dot{x} - im\omega x + z)\eta^*\,\delta\alpha \,. \end{aligned} \tag{5.164}$$

例題 5.24: (5.164) を確かめ, この変換の生成子は運動方程式を使って評価したとき保存されることをしめせ. また, それらの生成子の反交換関係は系のハミルトニアンに比例することをしめせ.

補助座標 z があるので ボソンの自由度は 2 つになる. それにより, フェルミオンの自由度の数とボソンの自由度の数が一致する. このため, 対称性を成立させるために運動方程式は必要なくなる. これは全ての超対称理論が持っている一般的な性質だ. 運動方程式を使う必要性を無くすためにフェルミオンの自由度とボソンの自由度は一致していなければならない.

もちろん, (5.155) の理論のダイナミクスは, ボソンとフェルミオンの部分が相互作用していないのであまり興味深くはない. 二つの部分が相互作用するような非線形項を, 超対称を保ったまま導入することができる. そのような作用の例に,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(\gamma x^2 - \mu^2)^2 + \frac{1}{2}i\eta^*\dot{\eta} - \frac{1}{2}i\dot{\eta}^*\eta - \gamma x\eta^*\eta \tag{5.165}$$

がある.

例題 5.25: (5.165) を不変に保つ超対称変換をみつけよ．そしてそれらの変換の生成子を構成せよ．また, 超対称性のチャージが保存することによる帰結を導け [2].

参 考 文 献

[1] H. Grassmann, *Hermann Grassmanns Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke*, Vols. I1 and I2, Teubner, Leipzig, 1894.

[2] B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[3] 例えば, J. Schwinger, *Particles and Sources*, Gordon and Breach, New York, 1969 をみよ.

[4] F.A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.

[5] 超対称性は次の文献で初めて定式化された. Y.A. Golfand and E.S. Likhtman, JETP Lett. **13**, 323 (1971). これは, スピンを持つ弦の理論で発見された. P. Ramond, Phys. Rev. D**3**, 2415 (1971).

[6] 超対称性の場の理論のモデルへの応用は, P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity, Second Edition*, World Scientific, Singapore, 1990 で数多く述べられている.

[7] 相対論的な超対称量子力学は, 指数定理 (9 章で議論する) を証明するために, L. Alvarez-Gaumé, Comm. Math. Phys. **90**, 161 (1983), and D. Friedan and P. Windey, Nucl. Phys. **B**235, 395 (1984), で使われた.

第6章　場の理論

標準的な量子力学は, ポテンシャルエネルギーが知られている系を扱うのには非常に便利であるが, それには限界があり, 自然を完全に記述することはできない. 二つの大きな欠点は, それが特殊相対性理論 [1] と相容れないことと, 粒子の数が一定でない系は取り扱うことができない, ということだ. これらの欠点を克服するものとして, 相対論的場の理論が発展した.

歴史的に, 当初目的とされたのはシュレーディンガー方程式の相対論化であった. そして, その最初の候補はクライン・ゴルドン (Klein-Gordon) 方程式 [2] とディラック (Dirac) 方程式 [3] であった. これらは, もともとシュレーディンガー方程式と同じように, 線形の微分方程式にポテンシャルを手で導入して構成された. しかし, 代数関係を波動関数に課すことによって, これらの方程式は波動関数を記述するだけではなく, 量子化された**場** (field) を導くこととなった. このようにして, 場の量子論が生まれた [4]. これにより, 理論に存在する粒子のフォック空間での表示が与えられて, クライン・ゴルドン方程式とディラック方程式が根本的に異なった粒子に対応することが明らかになった. 実際, クライン・ゴルドン場は, **スピンの無いボーズ粒子** (spinless boson) を記述するスカラー場 (scalar field) であり, また, ディラック場は, **スピン 1/2 のフェルミ粒子** (spin 1/2 fermions) を記述するスピノル場 (spinor field) であることがわかった. これらの場に加えて, 電磁場とそれを拡張して得られるヤン・ミルズ場 (Yang-Mills field) も同様に取り扱えることがわかった.

粒子の数が変化するような過程を記述するためには, 場について非線形な項を導入する必要がある. そして, これらの項は, 相対論的に不変でなければ

ならない. そのような理論を作るには, 作用汎関数の方法が一番簡単である. この方法では, 相対論的不変性は, 作用自身が**もともと**持っている対称性であるからだ. この相対論的不変性は, あらわれる場のタイプと非線形項を強く制限する. さらにゲージ対称性などの余分な対称性を要求すると, 許される作用の形により強い制限が加わる.

このようにして, 場の理論では, 作用の変分をとって得られる運動方程式を, 理論の粒子構造を記述する量子化条件を満たしながら解くことが問題となる. 非線形な場の量子論では, 多くの厳密な結果が得られてはいるというものの, 不運にも, ほんのわずかのモデルしか正確に解かれてはいない. そのため, しばしば理論のダイナミクスは摂動論的なテクニックを使って解析されるが, この方法は, 場の量子論では量子力学のときよりも信頼性に劣ると考えられる. 実際, 摂動論では各次数で発散する量があらわれるので, 意味のある結果を得るためには**くりこみ** (renormalization) を行なう必要がある. 量子電磁気学 (quantum electrodynamics, QED) を含むいくつかの場合には, 摂動論で得られた結果は素晴らしいものであった. しかし, 量子色力学 (quantum chromodynamics, QCD) などでは, 結果はあやしいものであって, せいぜい, 本当のダイナミカルな振舞いを示唆する程度である. 非摂動論的なテクニックを使って不十分ではあるがある程度の結果が得られている。それらはほとんど量子場の理論の経路積分法から来ている.

量子場の理論は物理の中でも非常によく調べられている分野であり, 多くの素晴らしい教科書がある [5-10]. それらの本との違いは、ここでは量子場の理論の経路積分法を調べることにある. これを意義あるかたちでするためには, 漸近的な散乱状態をあらわすフォック空間との関連を議論しなければならない. そのような関連無しには, 経路積分の意味が不明瞭になるし, 散乱や粒子生成のような測定される過程への応用が素直なものではなく, 神がかり的になる. 6.1 節では, 簡単な力学的なモデルを使って, 自由場の理論の経路積分の測度を求める. これは発見法的な道具として後でいろいろなテクニックを開発するのに使われる. 6.2 節では, 相対論的不変性を場の対称性と

して定式化し, スカラー, スピノル, およびベクトル表現について述べる. 6.3 節では, スカラーとスピノルの自由場（線形場）の作用汎関数を構成し, オイラー・ラグランジュ方程式を導く. 6.4 節ではネーターの定理を述べ, それを応用して保存則の相対論的不変性が古典的なレベルで何を意味するかを説明する. 6.5 節では, 自由場を量子化しフォック空間表示を導く. 6.6 節では S 行列を定義し, その行列要素から場の演算子の時間順序積を使って遷移確率の表式を導く. 6.7 節では, これらの遷移確率に対して相互作用表示の場の時間順序積の摂動表示を与える. 6.8 節では, 場の理論でのコヒーレント状態について説明する. この節の結果を使って, 非線形な場の理論での真空から真空への遷移振幅をあらわす汎関数（生成汎関数）の経路積分法を得る. また, そこではそのために必要な一連の仮定について述べる.

6.1　力学的モデル

この節では, 自由場の簡単な力学的なモデルを与える [11]. その目的は場の理論のある側面を与え, 経路積分の測度の発見法的な定義を与えることにある.

モデルは, 長さ L で両端が固定された 1 次元の弦である. この弦には一様に N 個の質点が固定されていて, 質点の間隔は, $\Delta x = L/(N+1)$ となっている. 各質点は質量が m で, したがって弦の単位長さ当たりの質量は $\rho = Nm/L$ であり, n 番目の質点の位置は $x_n = n\Delta x$ である.

質点は一つの垂直な方向にのみ振動でき, n 番目の変位を y_n をする. 質点の運動エネルギーは以下の式で与えられる.

$$T = \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2} m \dot{y}_n^2 \ . \tag{6.1}$$

弦のゆがみにはポテンシャルエネルギーがともない, それは y_n の最低次で次のように書ける.

$$V = \sum_{n=1}^{N+1} \tfrac{1}{2} (\kappa N/L)(y_n - y_{n-1})^2 \ . \tag{6.2}$$

ここで, κ は (長さ)$^{-2}$ の次元の定数であり, 弦の張力である. また, 端点では $y_0 = y_{N+1} = 0$ となっている. したがって, この系の古典的な作用は,

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt \sum_{n=1}^{N+1} \left[\tfrac{1}{2} m \dot{y}_n^2 - \tfrac{1}{2}(\kappa N/L)(y_n - y_{n-1})^2 \right] \tag{6.3}$$

で与えられる. 以下のラグランジアン密度は (6.3) と同等である.

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt \sum_{n=1}^{N+1} \left[p_n \dot{y}_n - \frac{p_n^2}{2m} - \tfrac{1}{2}(\kappa N/L)(y_n - y_{n-1})^2 \right] . \tag{6.4}$$

作用 (6.3) か (6.4) を変分すれば, N 個の結合した調和振動子の微分方程式が得られる.

作用 (6.4) の**連続極限**は次のような置き換えで得られる. n 番目の粒子の平衡位置からの変位は, x と t の両方の関数である ϕ を使って, $y_n(t) = \phi(x_n, t)$ と書く. また, n 番目の粒子の運動量は, $p_n(t) = \pi(x_n, t)\Delta x$ とする. 関数 $\pi(x, t)$ は, **運動量密度** (momentum density) と呼ばれる. 質量密度 ρ を一定にしたまま $\Delta x \to 0$ ととることにして, 次のような置き換えをする.

$$\begin{aligned} \dot{y}_n(t) &\to \frac{\partial \phi(x_n, t)}{\partial t} \equiv \dot{\phi}(x_n, t) \\ y_n(t) - y_{n-1}(t) &\to \frac{\partial \phi(x_n, t)}{\partial x_n} \Delta x \equiv \partial \phi(x_n, t)\, \Delta x \, . \end{aligned} \tag{6.5}$$

これにより, $\Delta x \to 0$ の極限で, 作用は

$$\begin{aligned} S &= \\ &\int_{t_a}^{t_b} dt \sum_{n=1}^{N+1} \Delta x \left[\pi(x_n, t)\dot{\phi}(x_n, t) - \frac{\pi^2(x_n, t)}{2\rho} - \tfrac{1}{2}\kappa \left(\frac{\partial \phi(x_n, t)}{\partial x_n} \right)^2 \right] \\ &\to \int_{t_a}^{t_b} dt \int_0^L dx \left[\pi \dot{\phi} - \frac{\pi^2}{2\rho} - \tfrac{1}{2}\kappa\, (\partial \phi)^2 \right] \end{aligned} \tag{6.6}$$

となる. 関数 ϕ は, 弦の配位を全体にわたって記述する**場の変数**となる.

場 ϕ の運動方程式は, まず, (6.3) の変分をとり, その次に連続極限を取ることによって得られる. その結果は以下のようになる.

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0 \, . \tag{6.7}$$

ここで $v = \sqrt{k/\rho}$ である．方程式 (6.7) は，弦に沿って速度 v で伝わる**横波** (transverse wave) を記述していて，$f(x \pm vt)$ の形のどんな関数も解である．以下この本では，自然単位系をとって，伝播速度は $v = c = 1$ とする．このため，**ダランベルシャン演算子** (d'Alembertian) $\Box$ を導入するのが便利である．それは，一次元空間では，以下を意味する．

$$\Box_x \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) . \tag{6.8}$$

混乱が生じないときには，添字は省略し，(6.7) は $\Box\, \phi = 0$ と書く．n 次元空間では，n 個のデカルト座標を使って，

$$\Box_x \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{6.9}$$

とする．

この系の量子化は，標準的な正準交換関係を y_n と p_n に課し，連続極限をとることによってなされる．y_n と p_n は時刻に依存するから，それらはハイゼンベルグ表示の演算子として理解される．したがって，交換関係は，**同時刻**で課され，異なる時刻での交換関係はダイナミクスによって決定されることになる．同時刻交換関係は，

$$[y_j(t), p_k(t)] = i\,\delta_{jk} \;\Rightarrow\; [\phi(x_j, t), \pi(x_k, t)] = i\frac{\delta_{jk}}{\Delta x} \tag{6.10}$$

である．この (6.10) は，連続極限では，次のような同時刻交換関係となる．

$$[\phi(x, t), \pi(y, t)] = i\delta(x - y) . \tag{6.11}$$

> **例題 6.1**: (6.10) の右辺の $\Delta x \to 0$ の極限がデルタ関数に一致することの正当性をしめせ．

(6.6) より，明らかに

$$\pi(x, t) = \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}(x, t)} \tag{6.12}$$

が成立する. 関係式 (6.12) は, 力学的な結果の連続系への拡張になっていて, 正準量子化条件に基いたどの量子場の理論でも正しいと仮定する [4]. (6.12) の結果により, より複雑な系でも正準運動量を定義できて, 正準交換関係によって量子化ができることになる. この章での力学的なモデルでは, (6.3) の連続極限が $\pi = \dot{\phi}$ を与えることはすぐにわかる.

この系の振舞いを調べるのに二通りのアプローチがある. 第一は, 運動方程式 (6.7) と交換関係 (6.11) から演算子形式を構成する方法である. これは, 6.5 章で相対論的な場について行う. 第二のアプローチは, 前の章の結果とここに述べた連続極限法を使って, 量子論の遷移振幅の経路積分表示を書き下す方法である. この方法は発見法的な意義もあるので, ここではこの第二のアプローチを取ることにする. もとのモデルは結合した調和振動子の集合であるから, 4.4 節の結果を弦の一般的な遷移振幅に使うことができる. 式 (4.96) を N 個の粒子に拡張すると, 遷移振幅は以下のように与えられる.

$$\langle\, q_b, p_b, t_b \,|\, q_a, p_a, t_a \,\rangle = \exp \tfrac{1}{2} i \sum_{n=1}^{N} (p_{na} q_{na} - p_{nb} q_{nb}) \int_{q_a, p_a}^{q_b, p_b} \mathcal{D}p\, \mathcal{D}q$$
$$\times \exp \left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \sum_{n=1}^{N} \left[p_n \dot{q}_n - \frac{p_n^2}{2m} - \frac{\kappa N}{2L} (q_n - q_{n-1})^2 \right] \right\} . \tag{6.13}$$

ここで, 積分測度は

$$\mathcal{D}p\, \mathcal{D}q = \prod_{n=1}^{N} \prod_{j=1}^{N_t - 1} \frac{dp_{nj}}{2\pi} dq_{nj} \tag{6.14}$$

であり, N_t は $t_b - t_a$ を分割する回数である. 弦の初期の配位と最後の配位は, 任意の実関数 $\phi_a(t)$, $\phi_b(x)$, $\pi_a(x)$, $\pi_b(x)$ によって与えられる. これらの関数は, 変数 q と p の初期値と最終値を次のように決める.

$$q_{n(a,b)} = \phi_{(a,b)}(x_n)\,, \quad p_{n(a,b)} = \pi_{(a,b)}(x_n)\, \Delta x\, . \tag{6.15}$$

関係式 (6.15) のため, 始状態と終状態は, 関数 ϕ と π によって定義される. (6.13) と (6.14) に連続極限を適用することにより, 遷移振幅が次のように与

えられることがわかる.

$$\langle\, \phi_b, \pi_b, t_b \,|\, \phi_a, \pi_a, t_a \,\rangle \;=\; \int_{\phi_a,\pi_a}^{\phi_b,\pi_b} \mathcal{D}\pi\, \mathcal{D}\phi\, \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int_0^L dx\, \left[\tfrac{1}{2}\pi\dot{\phi} - \tfrac{1}{2}\dot{\pi}\phi - \frac{\pi^2}{2\rho} - \tfrac{1}{2}\kappa\,(\partial\phi)^2 \right] \right\} \tag{6.16}$$

積分測度は, 次のようになる.

$$\mathcal{D}\pi\,\mathcal{D}\phi = \lim_{N,N_t\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \prod_{j=1}^{N_t-1} \Delta x\, \frac{d\pi(x_n,t_j)}{2\pi}\, d\phi(x_n,t_j)\,. \tag{6.17}$$

また, (6.13) にある位相因子は, 4.4 節のテクニックを使って指数の引数に吸収した.

最終的に, 自然単位を採用して簡単化を行う. $v=1$, または $\kappa=\rho$ と選び, $\pi \to \sqrt{\kappa}\pi$ と $\phi \to \phi/\sqrt{\pi}$ と変換して, 次の式を得る.

$$\langle\, \phi_b, \pi_b, t_b \,|\, \phi_a, \pi_a, t_a \,\rangle \;=\; \int_{\phi_a,\pi_a}^{\phi_b,\pi_b} \mathcal{D}\pi\, \mathcal{D}\phi\, \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int_0^L dx\, \left[\tfrac{1}{2}\pi\dot{\phi} - \tfrac{1}{2}\dot{\pi}\phi - \tfrac{1}{2}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\partial\phi)^2 \right] \right\}. \tag{6.18}$$

ここで, 積分測度は以下で与えられる.

$$\mathcal{D}\pi\,\mathcal{D}\phi = \lim_{N,N_t\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \prod_{j=1}^{N_t-1} \Delta x\, \frac{d\pi(x_n,t_j)}{2\pi}\, d\phi(x_n,t_j)\,. \tag{6.19}$$

この単位系では, ϕ は無次元量であり, π は(長さ)$^{-1}$ の次元を持つ. $\pi_a = \pi_b = 0$ という特別な場合には, 作用をリーマン和として書き下したうえで π 変数を積分して以下の式を得る.

$$\langle\, \phi_b, t_b \,|\, \phi_a, t_a \,\rangle = \int_{\phi_a}^{\phi_b} \overline{\mathcal{D}}\phi\, \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int_0^L dx\, \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \right] \right\}. \tag{6.20}$$

積分測度は,

$$\overline{\mathcal{D}}\phi = \lim_{N,N_t\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \prod_{j=1}^{N_t-1} \left(\frac{\Delta x}{2\pi i\,\Delta t} \right)^{\frac{1}{2}} d\phi(x_n,t_j) \tag{6.21}$$

で与えられる.

例題6.2: 式 (6.20) と (6.21) を確かめよ.

ここで, いくつかの重要な点がわかった. 第一には, 連続系は作用を用いて解析できるということだ. 場の理論への作用をつかったアプローチについては6.3 節で詳しく述べる. 第二の点は, 場の理論でも通常の量子力学と非常に似た方法で正準交換関係が定義できるということだ. 第三の点は, 任意の初期と終期の空間的な配位の間の遷移確率は, N 体系の量子力学と同様に経路積分で与えられて, その積分測度がいくつかのやり方であらわされるということだ.

これらの経路積分の内容から次のような直感的な描像が浮かび上がる. 系に許される配位に対応する場の量子論的な二つの状態間の遷移は, 二つの配位をつなぐ全ての関数のつくる**関数空間** (functional space) 内の全ての経路について, その経路の作用の指数の重みをつけて足し上げることによって得られる. この和は, それぞれの時空上の点での場を独立変数として扱って, その可能な全ての値についての積分として表される. 積分が可能なためには, 作用はリーマン和として書かれなければならない. このため, 微分があると, それが異なった点での場を関係づけるために, 計算が複雑となる. この経路積分に対するアプローチは, **配位の方法** (configuration method) と呼ばれる. この章の後の方で, コヒーレント状態間の遷移振幅の経路積分表示を演算子法で導く. 結果は, 測度が場のフーリエ要素の積分として書かれていることを除いて同じである. 経路積分 (6.20) に外場項が付け加わった場合については第8章で調べる. その経路積分からは場の演算子の時間順序積が生成され, それによって非線形な場の理論の摂動表示が導かれる.

6.2 相対論と群論

物理が意味あるものであるためには, 二人の観測者がその測定結果を比べられることが必要だ. これは, 基本的な観測量の測定結果が, ある観測者と他の

観測者との間で, お互いに合意できる手続きで**関係**していなければならない. このために, 観測量の関係を与える法則と, それによって結び付けられる観測量の集合が何であるかを明確にしなければならない. これは、二人の観測者が重力場が無いところで相対的に運動しているとき, **特殊相対論** (theory of special relativity) によって与えられている [1].

特殊相対論には二つの仮定がある. 第一に, 相対的な運動によらず光の速さはどの観測者にとっても同じである. 第二に, 物理の基本法則はどの慣性系上の観測者にとっても同じである. 最初の仮定からは異なる系の観測量の間の数学的な関係が得られ, 第二の仮定からは, どのような数学的な量から理論を構成すれば良いかが決まる.

第一の仮定は次のように理解できる. 二人の観測者がいて, その原点が一致しているとする. 光のパルスがこの原点から出て, 二人の観測者がこの光のパルスを空間座標と時間座標 (x,t) と (x',t') で受ける. このとき, 自然単位系 $(c=1)$ では,

$$t^2 - x^j x^j = t'^2 - x'^j x'^j \tag{6.22}$$

が成立していなければならない.

ここで, 相対論的な記号を導入するのが便利だ. 変数 t を x^0 とあらわして, 事象が発生した時空内の位置を, 4 元ベクトル (four vector) $x = (x^0, \mathbf{x})$ で記述する. この 4 元ベクトルの 4 成分を $x^\mu, \mu = 0, ..., 3$ と書く. 繰り返されたギリシャ文字 $(\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu \ldots)$ は, 4 つの値についての和を意味し, 繰り返されたラテン文字 $(i, j, \ldots)$ は, 空間成分 $(1,2,3)$ についてのみの和を意味する. 方程式 (6.22) は 4 次元時空のある内積の間の関係と見なすことができるように, **計量テンソル** (metric tensor) $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3)$ を導入する. この計量テンソルは, 4×4 の対称行列と見なすことができて, 重力場の無いときは, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ で他の成分は全て 0 である. 方程式 (6.22) は, この記号を使うと次のように書ける.

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \equiv x'_\mu x'^\mu \ . \tag{6.23}$$

ここで, $x_\mu \equiv g_{\mu\nu}x^\nu$ という記法を使った. 混乱する可能性が無いときには, $x \cdot x \equiv x_\mu x^\mu$ を x^2 と書く. 成分 x^μ は x の**反変成分** (contravariant components) をあらわし, x_μ は x の**共変成分** (covariant components) であって, x はミンコフスキー空間 (Minkowski space) のベクトルであるという. 明らかに x^μ と x_μ は異なるものであって, 物理的に意味のある積はx^μ と x_μ の**内積** (inner product) である. $g_{\mu\nu}$ の逆は $g^{\mu\nu}$ と書き, $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$ が満たされている. したがって, 二つの行列 $g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ を使って, 時空の添字を"上げ"たり, "下げ"たりできる.

勾配ベクトルの相対論的な形は, $\partial = (\partial/\partial t, \nabla)$ であり, その成分は $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ と書ける. したがって, 6.1 節で導入したダランベルシャンは $\Box = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial^\mu\partial_\mu$ と書ける. x の関数に対する微分演算子 d は $d = dx^\mu\partial_\mu$ となる.

x^2 の値は, ベクトル x の長さの二乗である. ミンコフスキー空間の計量のせいで, この値は正, ゼロ, 負になり得て, それぞれの場合に, そのベクトルは, **時間的** (timelike), **光的** (lightlike), **空間的** (spacelike) なベクトルであるという. これは次のように dx^μ から定義される微少な要素 ds についても同じである.

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \,. \tag{6.24}$$

一般的な座標系の間の変換$x \to x' = x'(x)$ のなかで物理的な拘束条件 (6.22) を満たすものだけが許される. (6.22) によれば, そのような変換のもとでは線要素 (6.24) は不変でなければならない.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \,. \tag{6.25}$$

したがって,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \tag{6.26}$$

であることがわかる. g が x によらないことを使い, さらに (6.26) を微分して $g_{\mu\nu}$の対称性を使うと, 座標変換が次の式を満たさなければならないこと

がわかる.

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0 \,. \tag{6.27}$$

上の (6.27) の一般解は,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \tag{6.28}$$

である. ここで, $\Lambda^\mu{}_\nu$ と b^μ は x から独立である. $b^\mu = 0$ のとき, (6.28) は, **ローレンツ変換** (Lorentz transformation) として知られている. 一般的に, $b^\mu \neq 0$ のときには, (6.28) は**ポアンカレ変換** (Poincaré transformation) として知られている. いま, ローレンツ変換に話を限ると, $\Lambda^\mu{}_\nu = \partial x'^\mu / \partial x^\nu$ であり,

$$g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \tag{6.29}$$

が成立する. もし, $\Lambda^\mu{}_\nu$ を 4×4 の行列とみると, g の形と (6.29) より,

$$\det g = \det(\Lambda^T g \Lambda) \;\Rightarrow\; \det \Lambda = \pm 1 \tag{6.30}$$

であることがわかる. $\det\Lambda = +1$ のときは, **固有ローレンツ変換** (proper Lorentz transformation) として知られる. 一方, $\det\Lambda = -1$ のときは, **非固有ローレンツ変換** (improper Lorentz transformation) という. 非固有ローレンツ変換の例としては, **時間反転** (time reversal) $(t, \mathbf{x}) \to (-t, \mathbf{x})$ と, **空間反転** (spatial inversion) $(t, \mathbf{x}) \to (t, -\mathbf{x})$ がある. この空間反転は, 右手系を左手系に変え, パリティ変換 (parity transformation) と呼ばれる. 量子系のパリティ変換のもとでの振舞いは非常に重要であるので, この特別な変換の場に対する作用は後に議論する.

> **例題 6.3**: 以下をしめせ.
>
> $$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^j{}_0 \Lambda^j{}_0 \,. \tag{6.31}$$

(6.31) の結果は, $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$ をしめしていて, このために, $\Lambda^0{}_0$ の値の属する範囲で変換を分類できる. もし, $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ ならば, 変換は**順時間的** (orthochronous) であるといい, $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ ならば, 変換は**逆時間的**

(nonorthochronous) であるという. 逆時間的な変換は, 明らかに, 時間反転の一般化になっている. このようにしてローレンツ変換は, 固有順時間変換 $L_+^\uparrow$, 非固有順時間変換 $L_-^\uparrow$, 固有逆時間変換 $L_+^\downarrow$, 非固有逆時間変換 $L_-^\downarrow$, の4種類に分類できることがわかる.

(6.22) の結果は, 4.3 節でみたような, 回転でベクトルの長さが不変であることによく似ている. 回転, つまり空間座標のみに働く変換は, x^2 を不変に保つので, 全ての可能なローレンツ変換の部分集合をなすことは明らかである. この部分集合は, 行列としてあらわすと,

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

と書ける. ここで, $\mathbf{R}$ は回転をあらわす 3×3 直交行列である. 4.3 節の解析から, $\mathbf{R}$ は3つのパラメータで特徴づけられることがわかっている. これらのパラメータは, 回転の3つの角度である. これに加えて, (6.32) は空間反転も含んでいる. したがって, (6.32) の形で, パリティを保存するものは $L_+^\uparrow$ に属し, パリティを保存しないものは $L_-^\downarrow$ に属する.

微少ローレンツ変換は, 次の形をとる.

$$\Lambda^\mu{}_\nu \approx \delta^\mu{}_\nu + \lambda^\mu{}_\nu \, . \tag{6.33}$$

上の (6.33) を (6.2) に代入して,

$$0 = g_{\nu\alpha}\lambda^\alpha{}_\mu + g_{\mu\alpha}\lambda^\alpha{}_\nu = \lambda_{\mu\nu} + \lambda_{\nu\mu} \tag{6.34}$$

を得る. ここで, $g_{\mu\nu}\lambda^\nu{}_\beta \equiv \lambda_{\mu\beta}$ とした. (6.34) より, $\lambda_{\mu\nu}$ は実の 4×4 反対称行列であり, 6つの任意 **パラメータ**を含むことがわかる. これらの内, 3つは空間座標のみを混ぜる空間回転の角度である. 他の3つのパラメータは, 時間座標と空間座標を混ぜるもので, 二つの座標系の間の相対速度の3成分である. これらの3つのパラメータは, 次の形で与えられる “ブースト” (boost) を特徴づけるものだ.

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^j \end{pmatrix} . \tag{6.35}$$

ここで, 二つの座標系の相対速度 v は j 軸の方向であるとした. ブーストは, 特殊相対論のよく知られた効果, 時間の遅れとローレンツ収縮を引き起こす. $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ なので, ブーストは, $L_+^\uparrow$ に属する. 同様に, 時間反転は, $L_-^\downarrow$ に属し, 完全な $x^\mu \to -x^\mu$ も $L_+^\downarrow$ に属する.

他にも, いくつか重要な4元ベクトルがある. エネルギー E と時間 t は正準共役であり, 一方空間運動量 $\mathbf{p}$ と空間座標 $\mathbf{x}$ も正準共役であることから, エネルギー・運動量ベクトル $p = (E, \mathbf{p})$ は時空ベクトル x と同様に変換されなければならないことがわかる. 静止質量 m の粒子では, エネルギー・運動量ベクトルは次の関係を満たすとされる.

$$p^2 = p \cdot p = p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 \,. \tag{6.36}$$

ここで, E については, 正の解のみが意味がある. また, $p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{px}$ はローレンツ不変となる. 他の重要な4元ベクトルは, 電磁場のスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ から作られる $A = (\phi, \mathbf{A})$ である. これが4元ベクトルとして変換されるのは, マックスウェル方程式が全ての慣性系で同じ形であるために必要である.

今までの議論から, 任意のローレンツ変換は4×4 の行列Λ だと思うことができて, その行列は, 6つのパラメータで完全に決定され, 4種類のどれかに分類することができるということがわかった. いま, $\Lambda(v, \theta)$ と $\Lambda(v', \theta')$ とが $L_+^\uparrow$に属するとしよう. 特殊相対性理論が2人の観測者を関係づける首尾一貫した理論であるためには, 三つめのパラメータの組(v'', θ'') があって, 次の式を満たす変換が存在しなければならない.

$$\Lambda(v'', \theta'') = \Lambda(v', \theta')\, \Lambda(v, \theta) \,. \tag{6.37}$$

そして, この変換は $L_+^\uparrow$に属さなければならない. 性質 (6.37) は, $L_+^\uparrow$に含まれる全てのローレンツ変換が行列の積に対して**群** (group) をなすことを意味する [12,13]. 群 G とは, 要素 $\{g\}$ の集合で, 積が定義され, 群に属する二つの要素の積 $g_1 g_2$ もまた群に属し, 積が結合法則を満たす (associative), つま

り $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ を満たすものをいう．また，群には 単位元 (identity) $I \in \mathrm{G}$ が存在し，$Ig = g$ であり，群のどの要素も逆元 g^{-1} を持ち，$gg^{-1} = I$ が成立している．

群は，一般的に2種類，**連続群** (continuous group) と**離散群** (discrete group) に分類できる．その簡単な例は，整数の集合 $\{1, -1\}$ である．連続群の要素は，ある区間の中の値をとるパラメータによって指定される．必ずしも必要では無いが，通常，単位元をパラメータ空間の原点 $\{0\}$ にとる．(6.37) を見ると，$L_+^\uparrow$ の全てのローレンツ変換は，6パラメータの連続群をなすことがわかる．この群は，通常**制限されたローレンツ群** (restricted Lorentz group) と呼ばれる [14]．他の分類に属するローレンツ変換を考えると，それらは単位元と滑らかにつながっていないので，微妙な点がある．直感的には，これは，三次元で右手系から左手系に回転では移れないことを思い浮かべればよい．このために，空間反転には，単位元から出発して6つのパラメータを滑らかに変えていって到達することはできない．このことは，**全ての**ローレンツ変換は，**連結** (connected) ではないということを意味する．

ここでは，簡潔にローレンツ群を議論したが，これは，一般に群が持つ豊かな構造の一部を垣間見たにすぎない．群論は，現代の数学にとって中心的な役割を果たす．第7章では，リー群を取り扱い，より細かく群の構造を議論する．以下では，必要な基本的概念を連続群に限って述べる．

連続群は，パラメータの数と範囲，そして，積に対して，どうパラメータが組み合わされるかで分類される．群の二つの要素が，それぞれ，α と β というパラメータの組であらわされ，その積が γ であらわされるとする．このとき，γ は，α と β の関数であり，この関数 $\gamma(\alpha, \beta)$ は群の積を与える．この性質は，群をどういう特定の行列形式であらわすかによらない．したがって，ここでローレンツ群について導いたような群の要素の特定の行列を使ったあらわしかたを，群の**表現** (representation) という．群の表現には多種ある．また，群の特定の表現が働く対象を**表現空間** (representation space) という．ローレンツ群の 4×4 行列表現では，それを導くのに使われた表現空間は，時空の

4元ベクトル x_μ である. 群の特定の表現は, 選んだ表現空間によって決定される. これは, 量子力学のとき, 座標表示と運動量表示があり, 固有値問題にあらわれる演算子の形がどちらを選んだかによって異なる状況と非常に似ている.

表現空間が決まると, 空間の要素同士の**テンソル積** (tensor product), または**クロネッカー積** (Kronecker product) を定義することができる. これは群の**直積表現**(direct product representation) の表現空間になる. たとえば, 時空のベクトルのテンソル積, $A^{\mu\nu} = x^\mu x^\nu$ は, $A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta A^{\alpha\beta}$ と変換する. ある表現について, どんな要素とも可換であるものは単位元のみであるとき, その表現は**既約表現** (irreducible representation) であるという. そうでなければ, その表現は**可約表現** (reducible representation) であるという. 群の既約表現とその表現空間を決定するのは, 物理にとって非常に重大だ. この例で, 読者になじみがあるのは, 3次元空間での回転群であろう. 量子力学の角運動量演算子は, 関数に働くとその変数を回転させるので, 回転の**生成子** (generator) である. 群と代数にともなう生成子については, 第7章で詳しく論じる. 回転の表現空間のテンソル積は, 量子力学で何種類かの角運動量が存在する場合に相当する. クレブシュ・ゴルドン(Clebsch-Gordon) 法 での角運動量の合成は, まさに, 回転群の直積の既約表現を見つける方法である.

もし, 群の全ての要素が可換であれば, その群は**アーベル群** (Abelian group) であるという. たとえば, 0を単位元とし, 和を演算とすると, 全ての整数の集合はアーベル群をなす. 要素が自明でない交換関係を持つとき, その群は**非アーベル群** (non-Abelian group) であるという. 群は, 群をなす部分集合 H を持つことがある. そのような集合は, **部分群** (subgroup) と呼ばれる. ローレンツ群の場合, 空間回転が部分群をなすことは自明だ. ポアンカレ変換 (6.28) は平行移動 $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ をローレンツ群に加えるが, この平行移動は, ポアンカレ群のアーベル部分群をなす.

例題 6.4: ポアンカレの平行移動が群をなすことを証明せよ.

異なる群が似た構造を持つことは多く, それらの間の写像を作ることができる. ローレンツ群と, 群 SL(2,C) はまさにこの例である. 群 SL(2,C) とは, 行列式が 1 である複素 2×2 行列の集合であり, 全ての要素がユニモジュラ (unimodular) であり, 逆を持つ. 任意の 2×2 行列 U は, 4 つの複素数要素, 合わせて 8 つの任意のパラメータを持つ. detU = 1 という条件は, detU の実部は 1 であり虚部は 0 であるという 2 つの式を与える. したがって, もとの 8 つのパラメータの内, 二つは方程式の解で与えられるので, SL(2,C) の要素は 6 つの独立なパラメータで与えられる.

例題 6.5: 行列式が 1 である全ての 2×2 複素行列の集合が行列の積について群をなすことを証明せよ.

ローレンツ群と SL(2,C) は同じ数のパラメータを持つので, SL(2,C) からローレンツ群への写像が存在するかどうかが自然と問題となる. その写像は, 任意の **U** ∈SL(2,C) をローレンツ群の要素に関連づけなければならない. これは, 次のようにしてできる. パウリのスピン行列は次のように 4 元ベクトルに拡張できる.

$$
\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,,\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,
$$
$$
\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,,\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{6.38}
$$

例題 6.6: (6.38) の行列が次の式を満たすことをしめせ.

$$
\begin{aligned}
\{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij} I\,,\\
\sigma_i\sigma_j &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij} I\,,\\
\sigma_\mu\sigma^\mu &= g^{\mu\nu}\sigma_\mu\sigma_\nu = -2\sigma_0\,,\\
\mathrm{Tr}(\sigma_\mu\sigma_\nu) &= 2\delta_{\mu\nu}\,.
\end{aligned} \tag{6.39}
$$

2×2 行列 $\not{x}$ は 4 元ベクトル x と (6.38) の行列から定義 $\not{x} = \sigma_\mu x^\mu = \sigma_0 x_0 + \sigma_j x^j$ に従ってつくられる. $\not{x}$ は座標 x^μ から作られているが, これと

同じように任意の4元ベクトル v から $\not{v}$ を作ることができる. もし, $\mathbf{U}$ が SL(2,C) に属するなら, それを使って $\not{x}$ を次のように変換することができる.

$$\not{x} = \mathbf{U}^\dagger \not{x}' \mathbf{U} \;\Rightarrow\; \not{x}' = (\mathbf{U}^\dagger)^{-1} \not{x} \mathbf{U}^{-1} \,. \tag{6.40}$$

$\det \mathbf{U} = 1$ であるから, (6.40) の行列式はこの変換のもとで不変であり, $x'_\mu x'^\mu = \det \not{x}' = \det \not{x} = x_\mu x^\mu$ である. したがって, $\mathbf{U}$ の $\not{x}$ への作用は長さ $x_\mu x^\mu$ を不変に保つので, ローレンツ変換である. 一般には, $\mathbf{U}$ はユニタリーではない. なぜなら, もしそうなら, $\not{x}$ のトレース $\mathrm{Tr}\,\not{x} = 2t$ は変換のもとで不変であり, 時間が変換されないことになる. したがって, そのような変換は空間回転に限られ, ブーストは表現できない. SL(2,C) では, ユニタリー行列が部分群をなし, それがローレンツ群の空間回転の部分群に対応するのである.

すべての観測者にとって行列の定義 (6.38) は共通であるから, 変換された座標は次のように与えられる.

$$\not{x} = \sigma_\mu x^\mu = \sigma_\mu x'^\nu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \mathbf{U}^\dagger \not{x}' \mathbf{U} \,. \tag{6.41}$$

この (6.41) 式は, どの Λ^{-1} にも少なくとも1つの $\mathbf{U}$ が対応することを意味する. 特に (6.41) の形は後で役に立つ. (6.39) を使えば, $\mathbf{U}$ にともなうローレンツ変換の正確な形が次の式により求められる.

$$x'^\nu (\Lambda^{-1})_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr}\,(\sigma_\mu \mathbf{U}^\dagger \not{x}' \mathbf{U}) \,. \tag{6.42}$$

例題 6.7: 微小ローレンツ変換 (6.33) に相当する SL(2,C) を構成せよ.

表現 (6.41) には二つ特記するべき点がある. 第一には, 写像に任意性があることである. もし行列 $\mathbf{U}$ が SL(2,C) に属するならば, 行列 $-\mathbf{U}$ も SL(2,C) に属する. ところが, 関係式 (6.41) によれば, これらは, どちらも**同じ**ローレンツ変換 Λ^{-1} に対応する. この SL(2,C) の表現は, 一価ではない. 実際この写像は2対1になっている. このような写像は, **忠実** (faithful) でないという. これは, このような表現を使ってあらわす物理的な系に重要な性質をも

たらす. 実際, この表現であらわされる粒子は, 表現の 2 価性のために, 2π の空間回転で波動関数（または, 場）は符号を変えなければならないので, フェルミオンとなる. SL(2,C) の写像はローレンツ群の**上へ** (onto) の写像であり, **同相写像** (isomorphism) ではない.

この SL(2,C) の表現の第二の重要な性質は, 非固有ローレンツ変換を表現することができないという難点である.

> **例題 6.8**: (6.41) が SL(2,C) を固有ローレンツ群のみの上への写像である. これをしめすために, どんな $\mathbf{U} \in$SL(2,C) もパリティ変換に対応させることは不可能であることを証明せよ.

この点は, 必ずしも非常な困難を引き起こすわけではないが, この表現を使ってあらわせる粒子や場の種類を制限する. この表現でモデル化される粒子は, 当初右ねじ回転なら右ねじ回転のまま, 左ねじ回転なら左ねじ回転のまま留まらなければならない. なぜなら, もしそうで無ければ, パリティ変換が存在し, 粒子のパリティを変化させることができるはずだからだ. もし, パリティ変換の演算子が必要でなければ, この表現は適切だ.

表現のパリティを手で選ぶことは可能だ. 元の $\not{x} = \sigma_0 x^0 + \sigma_j x^j$ は, パリティを変えた $\tilde{\not{x}} = \sigma_0 x^0 - \sigma_j x^j \equiv \tilde{\sigma}_\mu x^\mu$ に置き換えても表現の一般的な構造は変化しない. $\tilde{\not{x}}$ に働いて x のローレンツ変換を引き起こす行列を $\tilde{U}$ と呼ぶ. このとき, 次の式が成立する.

$$\tilde{\not{x}} = \tilde{\sigma}_\mu x'^\nu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \tilde{\mathbf{U}}^\dagger \tilde{\not{x}}' \tilde{\mathbf{U}} \,. \tag{6.43}$$

このローレンツ群の表現の選択の任意性は, 次の章でワイルのスピノル場の作用を論じるときに重要であることが明らかになるであろう.

パリティ演算子が無いという問題は, SL(2,C) の 2 重スピノル表現 (bispinor representation) を使えば, 非常に簡単に解決できる. 2 重スピノル表現はパウリのスピン行列を使って次のような 4 つの 4×4 行列 γ_μ を構成することに

よって得られる.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

γ 行列の添字は計量テンソルで上げたり下げたりできる. (6.44) の行列は次の性質を持つ.

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}\mathbf{1}. \tag{6.45}$$

ここで, $\mathbf{1}$ は, 4×4 の単位行列である. γ 行列としては, (6.45) の代数を満たす 4 つの行列のどんなものも使える. つまり, (6.44) の行列は (6.45) を満たす唯一の 4×4 行列ではなく, 実際, (6.44) をユニタリー変換したものも (6.45) の別の表現を与えるわけである. (6.44) という特別の形は, 代数 (6.45) のディラック表現と呼ぶ.

2 重スピノル表現 (6.44) を使えば $\not{x} = \gamma_\mu x^\mu$ は $\det \not{x} = (x_\mu x^\mu)^2$ という性質を持つので, 行列式を不変に保つ変換はローレンツ変換をあらわす. 4×4 行列 $\mathbf{U}$ を使って $\not{x}$ の変換は次のように定義される.

$$\not{x} = \mathbf{U}^{-1}\not{x}'\mathbf{U} = \gamma_\mu x^\nu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu. \tag{6.46}$$

この (6.46) にあらわれるのは, $\mathbf{U}^\dagger$ ではなく, $\mathbf{U}^{-1}$ であることに注意して欲しい. これは, 2 重スピノル表現では $\not{x}$ のトレースは 0 であり, 0 はローレンツ不変であることによる. (6.46) は, したがって, トレースを不変に保たなければならず, このために, $\mathbf{U}^{-1}$ が使われている. このローレンツ群の表現は依然として忠実ではないが, 行列 $\mathbf{U}$ が大きくなったために, パリティ変化をあらわす $\mathbf{U}$ を簡単に見つけることができる.

例題 6.9: $\mathbf{U} = \gamma_0$ が空間反転を生じること, および次の式を確かめよ.

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}. \tag{6.47}$$

行列 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{1}{4}i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ は重要な性質をいくつも持っている. ディラック表現では γ^5 は次の形をしている.

$$\gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.48}$$

行列 $\sigma_{\mu\nu}$ を$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ と定義する．このとき，γ 行列について次の性質が，選んだ**表現によらず**，成立する．

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = [\gamma^5, \sigma_{\mu\nu}] = 0 , \tag{6.49}$$

$$\not{a}\not{b} = a \cdot b\,\mathbf{1} - i\sigma_{\mu\nu}a^\mu b^\nu , \tag{6.50}$$

$$[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = 4g^{\nu\rho}\gamma^\mu - 4g^{\mu\rho}\gamma^\nu , \tag{6.51}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} . \tag{6.52}$$

例題6.10: (6.49) から (6.52) の関係を確かめよ．

例題6.11: (6.33) で定義されたローレンツ変換の微小形を使って，ローレンツ変換にともなう2重スピノル表現の微小形が次の式で与えられることをしめせ．

$$\mathbf{U}(\Lambda) \approx \mathbf{1} + \frac{1}{4}i\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} . \tag{6.53}$$

例題6.12: 世界が3次元，つまり時間1次元と空間2次元でできているとする．このとき，この低次元世界のローレンツ群の性質を決定せよ．

以上の議論から，ローレンツ変換での変換性を使って, 場を分類することができる．一般的な場 $\Psi(x)$ は時空の関数である．いま，時空の点Pがある観測者にとって座標 x であらわされ，また別の観測者にとって x' であらわされれていて，二つの座標はローレンツ変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ で関係しているとする．2人は，点Pでの同じ場の観測を関係づけられなければならない．これは，$\Psi'(x') = D(\Lambda)\Psi(x)$ を意味する．ここで，Ψ はいくつかの成分からなっていて，ローレンツ群のある既約表現 $D(\Lambda)$ によって変換されることも考えるので，Ψ にはプライムをつけている．この状況は3次元空間で回転をするときのベクトルの振舞いに類似している．そのような場合には，ベクトルが同じにもかかわらず，ベクトルの引数の座標が変化するだけでなく，ベクトルの新しい座標に添った成分も異なっている．2人の観測者が観測結果を比

較できるという必要性から，基本的な場としてどのようなものが許されるかが決定される．そのような場はローレンツ群か，(SL(2,C) の変換はローレンツ変換に写像できるから）SL(2,C) の既約表現になっていなければならない．

実の**スカラー場** (scalar field) $\phi(x)$ は，単純に点 P で 1 自由度を持つ．したがってそれは次のように変換される．

$$\phi'(x') = \phi(x) . \tag{6.54}$$

実の**ベクトル場** (vector field) $\mathbf{A}(x)$ は座標のように変換される．それは，4 つの実の自由度をもち，反変形式では $A^\mu(x)$ とかかれる．したがって，その変換は次の式で与えられる．

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) . \tag{6.55}$$

スピノル場 (spinor field) は，2×2 のときは (6.41) の $\mathbf{U}$ によって変換され，4×4 のときは (6.46) の $\mathbf{U}$ によって変換される．前者の場合，場 $\psi_a(x)$ は複素 2 成分を持ち，**ワイル・スピノル** (Weyl spinor) と呼ばれる．後者の場合は $\psi_a(x)$ は複素 4 成分で，**ディラック・スピノル** (Dirac spinor) と呼ばれる．明らかに，ワイル・スピノルは 4 自由度を持ち，ディラック・スピノルは 8 自由度を持つ．スピノルの変換は次の式で与えられる．

$$\psi'_a(x') = U_{ab}\psi_b(x) . \tag{6.56}$$

ラリタ・シュウィンガー場 (Rarita-Schwinger field) は，ワイルまたはディラック場とベクトル場を結合したもので，$\psi^\mu_a(x)$ と書かれ，16，または 32 自由度を持つ．その変換は，単純に二つの変換を同時に行ったもので，次のようになる．

$$\psi'^\mu_a(x') = \Lambda^\mu{}_\nu U_{ab}\psi^\nu_b(x) . \tag{6.57}$$

テンソル場 (tensor field) $h_{\mu\nu}$ も定義できるが，そのような場は，重力，または一般相対性理論と深く結び付いていて，この本の範囲を越えるためにここでは議論しない．

スカラー場とベクトル場の定義は，**擬スカラー場** (pseudo scalar field) と**擬ベクトル場** (pseudo vector field) を含むように拡張することができる．これらの場はスカラー場やベクトル場と同じように変換されるが，空間反転に対しては違った符号で変換される．例えば，擬スカラー場 ϕ_P は次の性質を持つ．

$$\phi_P(-\mathbf{x}, t) = -\phi_P(\mathbf{x}, t) \ . \tag{6.58}$$

最後に幾つかのコメントをしておこう．時空の体積要素は固有ローレンツ変換に対しては不変であるが，非固有ローレンツ変換では符号を変える．また，レビ・チビタ記号も同様である．これらは，より一般的にいえば，**テンソル密度** (tensor density) の例となっている．座標の変換に際して，これらには変換のヤコビアンもかかるのである．

例題 6.13: 非固有ローレンツ変換のもとで，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \to -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ をしめせ．

以上により，特殊相対論のもとで許される場の種類が明らかになった．次の節では，それらが満たすべき場の運動方程式を求めよう．

6.3 古典的自由場

この節では，6.2節でわかった場の古典的なダイナミクスを調べる．このダイナミクスは，作用汎関数を使って決定されて，その作用の変分が，共変的な，つまり，ローレンツ変換で関係しているすべての座標系で同じ形の一階，または二階の微分方程式を導く．これらの場の粒子構造は，6.5 節で場を量子化した後に決定される．

古典的な作用は，実で次元のない量であり，次の形をしている．

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \, \mathcal{L}(\Psi_\alpha, \partial_\mu \Psi_\alpha) \ . \tag{6.59}$$

ここで，ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$は，場 $\Psi_\alpha(x)$ （α は作用にあらわれるいろいろな場をあらわす添字）とその微分の局所的な関数であり，$\mathcal{M}$ は，場が存

在する全時空である．運動方程式の明白な共変性は，ラグランジアン密度がどの系でも同じ形と値を持つ，つまり，単純に言ってラグランジュ密度がスカラーであるということによって保証されている．したがって，ローレンツ変換のもとで， $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ であり，これは，$\mathcal{L}$にあらわれる全ての項がローレンツ・スカラーでなければならないことを意味する．これは，作用密度がローレンツ変換のもとで**不変型** (invaritant form) をしている，つまり，4.3 節の言葉を使うならば，ローレンツ群が作用の**対称性**になっていると言う．実際には，普通，作用は全時空の積分で与えられるので，全対称性は，ポアンカレ群である．この対称性が導く性質などについては次の節で調べる．

運動方程式は，解のまわりの場の変分 $\Psi_\alpha \to \Psi_\alpha + \delta\Psi_\alpha$ に対して，作用が不変であることによって与えられる [15]．(ただし, $\delta\Psi_\alpha$ は時空の境界で 0 であるとする. 境界が無いときは無限遠で 0 とする.）これにより，次のようになる．

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha} \delta\Psi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\alpha)} \delta(\partial_\mu \Psi_\alpha) \right] = 0 \,. \tag{6.60}$$

$\delta(\partial_\mu \Psi_\alpha) = \partial_\mu \delta(\Psi_\alpha)$ と部分積分により次の式が得られる．

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\alpha)} \right] \delta\Psi_\alpha = 0 \,. \tag{6.61}$$

$\delta\Psi_\alpha$ は任意であるので，作用の変分は次のオイラー・ラグランジュ方程式が成立するときのみ 0 となる．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\alpha)} = 0 \,. \tag{6.62}$$

オイラー・ラグランジュ方程式 (6.62) は，もし作用が場について 2 次ならば，線形の偏微分方程式となる．線形偏微分方程式は，解の重ね合せはやはり解になるという便利な性質を持っていて，この性質のために，運動方程式の一般的な波束解が構成できる．この理由で，2 次の作用は，ほとんど全ての場と粒子の解析の基礎となる．以下で，スカラーとスピノル場の 2 次の作用を無限ミンコフスキー時空に対して与える．ベクトル場については，ゲージ不変性の問題があるので，第 7 章で述べる．

6.3.1　スカラー場

もし，$\phi(x)$ がスカラー場ならば，ϕ のどんな巾もスカラーとして変換する．したがって，2次のラグランジアンとしては，以下のようなものが可能である．

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - \tfrac{1}{2} m^2 \phi^2 \,. \tag{6.63}$$

ここで，m は定数である．作用が無次元量であるためには，場 ϕ は長さの逆巾の次元を持ち，m も，このために，同じく長さの逆巾の次元を持たなければならないことになる．

(6.63) から導かれるオイラー・ラグランジュ方程式は，クライン・ゴルドン方程式となる．

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = (\Box + m^2)\phi = 0 \,. \tag{6.64}$$

ここで，ダランベルシャンの定義 $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ を使った．次の形の平面波は (6.64) の解になっている．

$$\phi^{(+)}(p) = \exp(ipx) \,, \ \ \phi^{(-)}(p) = \exp(-ipx) \,. \tag{6.65}$$

ここで，$px = p_\mu x^\mu$ であり，4元ベクトル p は $p^2 = m^2$ を満たさなければならない．また，(6.65) の p_0 は，正の値，$p_0 = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}$ をとるとしている．(6.36) との類似から，m は場にともなう粒子の質量であろうと考えられるが，これは 6.5 節での場の量子化を待たねばならない．

(6.64) の一般解は，次の形の波束であたえられる．

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2p_0} \left[f(\mathbf{p}) e^{ipx} + f^*(\mathbf{p}) e^{-ipx} \right] \,. \tag{6.66}$$

ここで，$\mathbf{p}$ は p の空間部分であり，$f(\mathbf{p})$ は任意の関数である．(6.66) の形から，初期に局所的に存在するどんな波束もやがて拡散することがわかる．これを見るには，分散関係式 (dispersion relation) $p_0 = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ の非相対論的極限を考えればよい．

例題 6.14: $f(\mathbf{p}) = C\exp(-\alpha\mathbf{p}^2)$ で与えられる (6.64) の解を考える．時間 t が $t=0$ から増加するにつれてこの波束が拡がることをしめせ．群速度 v_g，つまり波束の頂点の速度は，$v_g < 1$ を満たすことをしめせ．

例題 6.15: 関数 $f(\mathbf{p})$ のローレンツ変換のもとでの振舞いを決定せよ．

複素スカラー場 ϕ は，同じ質量 m を持つ実スカラー場二つ ϕ_1, ϕ_2 を使って定義できる．ラグランジアンは次の形をしている．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2+\phi_2^2) = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi\ . \quad (6.67)$$

ここで，$\phi = (\phi_1 + \phi_2)/\sqrt{2}$ である．(6.67) で定義される作用は，複素共役と位相変換 $\phi \to e^{i\lambda}\phi$ に対して不変だ．この対称性は，6.4 節で解析する．

例題 6.16: 複素場の運動方程式の一般的な波束解を構成せよ．

6.3.2 スピノル場

2成分ワイル・スピノルの作用を構成しよう [16]．ワイル・スピノルは，(6.41) で決まる $\mathbf{U}$ で変換されるのに対応して，一階微分演算子 $\partial\!\!\!/ = \sigma^\mu\partial_\mu = \sigma^0\partial_0 + \sigma^j\partial_j = \sigma_0\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla$ を導入する．ローレンツ変換のもとで，2次形式 $\psi^\dagger\partial\!\!\!/\psi$ (これは $\psi_a^\dagger(\partial\!\!\!/)_{ab}\psi_b$ を意味する) は次のように変換される．

$$\begin{aligned}\psi^\dagger(x)\partial\!\!\!/\psi(x) &\to \psi'^\dagger(x')\partial\!\!\!/'\psi'(x') \\ &= \psi^\dagger(x)\mathbf{U}^\dagger\partial\!\!\!/'\mathbf{U}\psi(x) = \psi^\dagger(x)\partial\!\!\!/\psi(x)\ . \end{aligned} \quad (6.68)$$

つまり，この2次形式は不変である．しかし，$\psi^\dagger\psi \equiv \psi_a^\dagger\psi_a$ は $\mathbf{U}^\dagger \neq \mathbf{U}^{-1}$ のために，**不変では無い**．したがって，ワイル・スピノルの2次の作用で，$\partial\!\!\!/$ について1次以下のものとしては，次の形しかない．

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\, i\psi^\dagger\partial\!\!\!/\psi\ . \quad (6.69)$$

これにより，ψ の次元は，(長さ)$^{-3/2}$ になる．

例題 6.17: S が実でポアンカレ不変であることをしめせ．

オイラー・ラグランジュ方程式を作用 (6.69) に適用すると，ワイル・スピノルの一階運動方程式，

$$\partial\!\!\!/ \psi = 0 \tag{6.70}$$

とそのエルミート共役が得られる．この方程式をくり返し使い，σ_0 がパウリのスピン行列と可換であることを利用して，次の式を得る．

$$\sigma_i \partial_i \sigma_j \partial_j \psi = \sigma_0 \partial_0 \sigma_i \partial_i \psi = (\sigma_0)^2 \partial_0^2 \psi = \partial_0^2 \psi \ . \tag{6.71}$$

パウリのスピン行列の性質 (6.39) より，

$$\sigma^j_{ab} \sigma^k_{bc} \partial_j \partial_k = \delta^{jk} \delta_{ac} \partial_j \partial_k + i\varepsilon^{jkl} \sigma^l_{ac} \partial_j \partial_k = \delta_{ac} \nabla^2 \tag{6.72}$$

がわかる．したがって，(6.71) は次のように変形できる．

$$\nabla^2 \psi_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_a \ \Rightarrow \ \Box \psi_a = 0 \ , \ a = (1, 2) \ . \tag{6.73}$$

これにより，(6.70) の解のどの成分も質量 0 の波動方程式を自動的に満たすことがわかる．

(6.70) のどの解も次の形をとる．

$$\psi_p(x) = \begin{bmatrix} f_1(p) \\ f_2(p) \end{bmatrix} e^{\pm ipx} \ . \tag{6.74}$$

ここで，$p^2 = 0$ である．$p_\mu = 0$ の極限では，(6.70) に次の二つの独立な解がある．

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{6.75}$$

これらは，$u_0^\dagger u_0 = v_0^\dagger v_0 = 1$ と $u_0^\dagger v_0 = 0$ という性質を満たしている．$p_\mu \neq 0$ での解を構成するには，

$$(\sigma_0 p_0 + \sigma_j p^j)(\sigma_0 p_0 - \sigma_i p^i) = (p_0^2 - \mathbf{p}^2) I = 0 \tag{6.76}$$

が成立し，

$$\not{\partial} e^{\pm ipx} = \pm i(\sigma_0 p_0 + \sigma_j p^j) e^{\pm ipx} \tag{6.77}$$

となることを使う．p_0 の正の値を $\epsilon_p = +|\mathbf{p}|$ とすと, 解は次のようになる．

$$\begin{aligned} u(p)e^{\pm ipx} &= N_p(\sigma_0\epsilon_p - \sigma_j p^j)u_0 e^{\pm ipx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_p(\epsilon_p - p^3)}} \begin{pmatrix} -\epsilon_p + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix} e^{\pm ipx} . \end{aligned} \tag{6.78}$$

ここで，(6.78) と以下では，N_p は規格化因子であり，$px = \epsilon_p t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ とする．他の解は，同様に次のように得られる．

$$v(p)e^{\pm ipx} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_p(\epsilon_p + p^3)}} \begin{pmatrix} -p^1 + ip^2 \\ \epsilon_p + p^3 \end{pmatrix} e^{\pm ipx} . \tag{6.79}$$

スピノル解の規格化は，内積が次を満たすように選ばれる．

$$u^\dagger(p)u(p) = v^\dagger(p)v(p) = 1 . \tag{6.80}$$

これらの解は以下の一種の直交性を持つ．

$$u^\dagger(p)u(\tilde{p}) = v^\dagger(p)v(\tilde{p}) = u^\dagger(p)v(\tilde{p}) = 0 . \tag{6.81}$$

ここで，$\tilde{p} = (\epsilon_p, -\mathbf{p})$ である．(6.70) の一般的な波束解は次のように書くことができる．

$$\psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[d^*(\mathbf{p})u(p)e^{-ipx} + f(\mathbf{p})v(p)e^{ipx} \right] . \tag{6.82}$$

ここで，特解 u, v に e^{ipx} と e^{-ipx} をどのように組み合わせるかは任意である．波束 (6.82) は，光速で動く，散逸の無い波をあらわす．

スピノル解の物理的な意味を明らかにするために，非相対論的な量子力学では，パウリ行列を使って，電子のスピン $\mathbf{S}$ を $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\sigma$ とあらわすことを思い出そう．この場合でも，証明は角運動量を扱う 6.5 節でするが, 同様の関係が成立する．相対論的な場の理論では，スピン角運動量の運動の方向への射

影のみが意味のある量である．この量は**ヘリシティ** (Helicity) と呼ばれ，運動量 $\mathbf{p}$ の解では次のように与えられる．

$$\Sigma_p = \frac{1}{2}\frac{\sigma_j p^j}{\epsilon_p} . \tag{6.83}$$

例題6.18: Σ_p が固有値 $\pm 1/2$ を持ち，$u(p)$ と $v(p)$ は固有値 $-1/2$ の固有ベクトルであることを証明せよ．

両方の解が同じヘリシティを持つことは，ワイル・スピノルには，パリティ演算子が無いということに起因している．これはこの節の最後に議論する．これに関しては，二つの解が変換

$$u(\tilde{p}) = \sigma_2 v^*(p) \tag{6.84}$$

によって関係していることが重要である．

微分演算子 $\tilde{\not\partial} = \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu$ から出発して，ローレンツ群の他の表現をとることも可能であった．この節の計算を同様に行うことで，パリティが逆の方程式，

$$\tilde{\not\partial}\psi = 0 \tag{6.85}$$

の解を求めることができる．

例題6.19: 方程式 (6.85) の規格化された解をもとめ，それらがヘリシティ+1/2 を持つことをしめせ．

ディラックのスピノル場のローレンツ・スカラーの2次形式を構成する [3] ことは，もう少し難しい．微小変換の形 (6.53) から，2重スピノル場の任意のローレンツ変換は，

$$\mathbf{U} = \exp\left(\frac{1}{4} i\, \omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \tag{6.86}$$

と書かれることがわかる．ここで，$\omega_{\mu\nu}$ は実反対称 4×4 行列の成分であり，ローレンツ変換の6つのパラメータの関数である．

> **例題6.20**: **U** が表現するローレンツ変換の $\Lambda_{\mu\nu}$ と $\omega_{\mu\nu}$ の正確な関係式を求めよ．

(6.86) より，次の式が求められる．

$$\mathbf{U}^\dagger = \exp\left(-\tfrac{1}{4}i\,\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu\dagger}\right) \neq \mathbf{U}^{-1} . \tag{6.87}$$

しかし，性質 (6.47) より， $\mathbf{U}^\dagger$ はその逆に次のように変換されることがわかる．

$$\gamma^0\mathbf{U}^\dagger\gamma^0 = \mathbf{U}^{-1} . \tag{6.88}$$

ここで，$\gamma^0\sigma^{\mu\nu\dagger}\gamma^0 = \sigma^{\mu\nu}$ という性質を使った．場の変数 $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ を導入すると，ローレンツ変換のもとで，

$$\bar{\psi}'(x') = \psi^\dagger(x)\mathbf{U}^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0\mathbf{U}^{-1} = \bar{\psi}(x)\mathbf{U}^{-1} \tag{6.89}$$

が成立し，$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_a\psi_a$ がローレンツ・スカラーであることがわかる．それに加えて，(6.46) と (6.68) から，微分演算子$\not\partial = \gamma^\mu\partial_\mu$ を使って，ローレンツ・スカラー $\bar{\psi}\not\partial\psi$ も構成できる．これを以前の結果と組み合わせて，次のディラック・スピノルの作用が得られる．

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\, i\bar{\psi}(\not\partial + im)\psi . \tag{6.90}$$

作用の最初の項が無次元であるために，ψ は，(長さ) $^{-3/2}$ の次元を持つ．したがって，定数 m は，(長さ) $^{-1}$ の次元を持ち，質量と理解される．

作用 (6.90) にともなうオイラー・ラグランジュ方程式は，二つある．一つは，ディラック方程式

$$(\not\partial + im)\psi = 0 \tag{6.91}$$

であり，もう一つはその共役，

$$\bar{\psi}(\overleftarrow{\not\partial} - im) = 0 \tag{6.92}$$

である．ここで，共役な方程式の微分演算子は，左に働くとする．ディラック行列の満たす代数 (6.45) を使って，次の式がしめせる．

$$\not\partial\not\partial = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\partial_\mu\partial_\nu = \mathbf{1}g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \mathbf{1}\Box\,. \tag{6.93}$$

したがって，ディラック方程式から，

$$(\not\partial - im)(\not\partial + im)\psi = (\not\partial\not\partial + m^2)\psi = (\Box + m^2)\psi = 0 \tag{6.94}$$

が成立することがわかる．したがって，2重スピノルのどの成分もスカラー場のときにあったような，**質量のある**粒子の波動方程式を満たす．

これにより，ディラック方程式の解は，4成分スピノル $w(p)$ と $p^2 = m^2$ を満たす4元運動量 p を使って，$\psi = w(p)e^{\pm ipx}$ と書けることがわかる．粒子の静止系では，$\mathbf{p} = \mathbf{0}$ であるので，$px = mt$ となり，ディラック方程式は，

$$(\not\partial + im)\psi = (\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + im)w(0)e^{\pm imt} \tag{6.95}$$

に帰着する．(6.44) の γ^0 の形を使うと，(6.95) の解が簡単に見つかる．負の符号を選べば，解は次のように与えられる．

$$u_1(0)e^{-imt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}\,,\quad u_2(0)e^{-imt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}\,. \tag{6.96}$$

一方，正の符号では，

$$v_1(0)e^{imt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt}\,,\quad v_2(0)e^{imt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt} \tag{6.97}$$

となる．

$\mathbf{p} \neq 0$ のときの解は，これらの静止系の解をローレンツ変換によって，ブーストすることによって得られる．しかし，もっと簡単な方法は，(6.76) に似た次の恒等式，

$$(\not p + m\mathbf{1})(\not p - m\mathbf{1}) = \not p\not p - m^2\mathbf{1} = (p^2 - m^2)\mathbf{1} = 0 \tag{6.98}$$

と，ディラック演算子 $\partial\!\!\!/ + im$ が平面波に作用したときに，

$$(\partial\!\!\!/ + im)e^{\pm ipx} = \pm i(p\!\!\!/ \pm m)e^{\pm ipx} \tag{6.99}$$

となることを利用することだ．こうして，ディラック方程式の解は (6.96) と (6.97) から得られて，次のようになる．

$$u_s(p)e^{-ipx} = N_p(m + p\!\!\!/)u_s(0)e^{-ipx} \ , \tag{6.100}$$

$$v_s(p)e^{ipx} = N_p(m - p\!\!\!/)v_s(0)e^{ipx} \ . \tag{6.101}$$

ここで，$s = (1, 2)$ であり，N_p は規格化因子である．

例題 6.21: 共役なディラック方程式 (6.92) の解は次のように与えられることをしめせ．

$$\bar{u}_s(p)e^{ipx} = N_p\bar{u}_s(0)(m + p\!\!\!/)e^{ipx} \ , \tag{6.102}$$
$$\bar{v}_s(p)e^{-ipx} = N_p\bar{v}_s(0)(m - p\!\!\!/)e^{-ipx} \ . \tag{6.103}$$

規格化因子を $N_p = 1/\sqrt{2m(m+\epsilon_p)}$，(ただし，$\epsilon_p = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$) と選べば，スピノルの内積は，次で与えられる．

$$\bar{u}_s(p)u_{s'}(p) = -\bar{v}_s(p)v_{s'}(p) = \delta_{ss'} \ , \tag{6.104}$$

$$\bar{u}_s(p)v_{s'}(p) = 0 \ , \tag{6.105}$$

$$u_s^\dagger(p)u_{s'}(p) = v_s^\dagger(p)v_{s'}(p) = \frac{\epsilon_p}{m}\delta_{ss'} \ , \tag{6.106}$$

$$\bar{u}_s(\tilde{p})u_{s'}(p) = -\bar{v}_s(\tilde{p})v_{s'}(p) = \frac{\epsilon_p}{m}\delta_{ss'} \ , \tag{6.107}$$

$$\sum_{s=1}^{2}\left[\bar{u}_s^a(p)u_s^b(p) - \bar{v}_s^a(p)v_s^b(p)\right] = \delta_{ab} \ . \tag{6.108}$$

ここで，以前のように $\tilde{p} = (\epsilon_p, -\mathbf{p})$ とし，(6.108) 以外ではスピノルの添字についての和を暗黙の了解として記していない．

例題 6.22: (6.104) から (6.108) までの式を確認せよ．

これらのスピノルを使って，ディラック方程式の一般的な波束解を構成することが可能である．そのような解は以下に便利なように次のように与えておく．

$$\psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\epsilon_p}} \left[b_s(\mathbf{p}) u_s(p) e^{-ipx} + d_s^*(\mathbf{p}) v_s(p) e^{ipx} \right] . \tag{6.109}$$

ここで，添字 s については和をとっている．

他のディラック場の 2 次形式を定義することも可能である．例えば，$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ はベクトルの反変成分として変換する．他については演習として残しておく．

例題 6.23: $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ と $\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$ はそれぞれ擬スカラーと擬ベクトルとして変換することをしめせ．

ワイル方程式とディラック方程式の解の物理的な内容は，量子化したときに最もよく明らかになるが，その幾つかの局面は古典的に考えることもできる．ワイル・スピノルは，質量を持てないが，これはパリティ演算子が存在しないせいだ．これを見るには，ヘリシティと右手系・左手系の関係を見ればよい．ヘリシティとは，解の運動の方向を定義するベクトル $\mathbf{p}$ へのスピン角運動量への射影だ．もし，解のヘリシティが正なら，その角運動量は運動の方向に対する**右ねじの向き**の回転 (または，右手向きの回転, right-handed rotation) に相当する．反対に，負のヘリシティは運動の方向に対する**左ねじの向き**の回転 (左手の向きの回転, left-handed rotation) に相当する．もし，ワイル・スピノルが質量を持てば，$\mathbf{p}$ の符号が異なる系にブーストすることが可能で，このような変換は，右ねじ回転を左ねじ回転に変えるし，また，その逆に，左ねじ回転を右ねじ回転に変える．したがって，そのようなブーストは，解のパリティの変化を起こす．しかし，SL(2,C) の解析から，そのような変換は 2 成分表現には存在しないことがわかっている．したがって，ワイル・スピノルは，$\mathbf{p}$ の符号を変化させるようなブーストが無いように，質量を持ってはならない．自然にある粒子，ニュートリノは，ワイル・スピノルを使って表わされると考えられる．実験的な誤差の範囲内で，ニュートリノは質量が 0 であると思われていて，全ての観測にかかったニュートリノは左ねじ向きで，6.5 節で論じ

る反ニュートリノは右ねじ向きである．これらは，ワイル・スピノルの波束を使って容易に表わすことができる．

ディラック表現では，パリティ変換が存在するために，二重スピノルが質量を持つことができる．ワイル・スピノルでは右ねじ・左ねじの向きと密接な関係があるので，ディラック方程式でも解の向きを考えておこう．これは，γ_5 を使って異なる向き，**カイラリティ** (chirality) を定義することによって行う．ディラック・スピノルの右成分 (R) と左成分 (L) は，$\psi = \psi^{(R)} + \psi^{(L)}$ となるように，次のように定義する．

$$\psi^{(R)} = \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi\,,\ \ \psi^{(L)} = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi\,. \tag{6.110}$$

これらの成分は γ_5 の固有関数になっている．

$$\begin{aligned}\gamma_5\psi^{(R)} &= \tfrac{1}{2}(\gamma_5 + (\gamma_5)^2)\psi = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = +\psi^{(R)}\,,\\ \gamma_5\psi^{(L)} &= \tfrac{1}{2}(\gamma_5 - (\gamma_5)^2)\psi = -\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = -\psi^{(L)}\,.\end{aligned} \tag{6.111}$$

このために，γ_5 は **カイラリティ**演算子と呼ばれる．

もちろん，これまでの結果は，γ 行列の表現に独立である．しかし，ディラック方程式のカイラリティの内容を表わすのに特に便利な γ 行列の表現があり，ワイル表現，またはカイラル表現と呼ばれている．ワイル表現では，γ 行列は次のように与えられる．

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\,,\ \ \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{6.112}$$

また，γ_5 は，

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{6.113}$$

で与えられる．したがって，もし ψ がカイラル表現のディラック方程式の解ならば，二重スピノルは 2 成分スピノル χ と ξ の和として表わされる．

$$\psi^{(R)} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}\,,\ \ \psi^{(L)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}\,. \tag{6.114}$$

ディラックの作用の質量項は,

$$m\bar{\psi}\psi = -m\xi^\dagger\chi - m\chi^\dagger\xi \tag{6.115}$$

となり, いわゆる運動エネルギーの項は以下のようになる.

$$i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi = i\xi^\dagger(\partial_0 + \sigma_j\partial_j)\xi + i\chi^\dagger(\partial_0 - \sigma_j\partial_j)\chi\ . \tag{6.116}$$

$m \neq 0$ の作用において χ と ξ について変分をとると, 連立一次微分方程式が得られる. しかし, (6.116) を見て明らかなように, $m = 0$ のディラック作用はパリティの異なる二つのワイル・スピノルの作用の和になっている. この二つのワイル作用は, γ_0 であらわされる空間の反転のもとでお互いに移り変わる.

カイラリティについては, ディラックの2重スピノルの質量が0のときに最も簡単な描像を得ることができる. (6.116) を (6.68) と比較することによって, χ が負ヘリシティのワイル・スピノルに相当し, ξ が (6.85) の正ヘリシティに相当することがわかる. 一方, ξ と χ の定義と γ_5 の (6.113) のカイラル表現での形から, ξ が右カイラルモードで, χ が左カイラルモードであることがわかる. したがって, 質量の無いディラック・スピノルでは, カイラリティとヘリシティが完全に対応している.

しかしながら, (6.110) の右か左のカイラル・スピノルのみを使って, ローレンツ不変な質量項を作ることができる. 左カイラルの場合は, この質量項は次の形をとる.

$$\tfrac{1}{4}im\psi^T(1+\gamma_5)C\gamma_0(1+\gamma_5)\psi - \tfrac{1}{4}im\psi^\dagger(1+\gamma_5)C\gamma_0(1+\gamma_5)\psi^*\ . \tag{6.117}$$

ここで, C は, **荷電共役** (charge conjugation) 行列であり, ワイル表現では,

$$C = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix} \tag{6.118}$$

で与えられる. この質量項は, ワイル表現では, 2成分スピノル χ で次のように書かれる.

$$im\,\chi^T\sigma^2\chi - im\,\chi^\dagger\sigma^2\chi^*\ . \tag{6.119}$$

> **例題 6.24**: (6.117) はローレンツ・スカラーであることを$\sigma_2\sigma_j\sigma_2 = -\sigma_j^*$ を使って証明せよ.

この結果はある拘束条件の元での通常のディラック二重スピノルの質量項と関係している. **マヨラナ** (Majorana) スピノル ψ^M はディラック・スピノルで次の拘束条件を満たすものである.

$$\psi = C\bar{\psi}^T \ . \tag{6.120}$$

ワイル表現では, これは 2 成分スピノル ξ と χ の間の次のような拘束条件となる.

$$\xi = i\sigma_2\chi^* \ , \ \ \chi = -i\sigma_2\,\xi^* \ . \tag{6.121}$$

(6.121) の二つの拘束条件は同等である. (6.121) と (6.84) を比較するとこの拘束条件はワイル方程式の同じカイラリティの二つの解の間の関係と同じであることがわかる.

> **例題 6.25**: ディラック表現からワイル表現へのユニタリー変換を見つけよ. これを使って, (6.114) の二つのワイル・スピノルをディラックの 2 重スピノルで表わせ. マヨラナ条件を満たすディラック・スピノルをみつけよ.

これにより, ディラック質量項 $\bar{\psi}\psi$ が, $\psi = \psi^M$ のときに (6.119) の質量項になることがわかる. 結局, 拘束条件がディラック・スピノルの 8 自由度をワイル・スピノルの 4 つに, ローレンツ共変なやりかたで減らしているわけである.

これまで, パリティ変換 P のもとでの場の振舞を中心に議論してきたが, 時間反転 T も考えることができる. 量子力学と量子場の理論での時間反転は状態の反ユニタリー変換をともなう.

$$\langle T\psi\,|\,T\phi\rangle = \langle\psi\,|\,\phi\rangle^* = \langle\phi\,|\,\psi\rangle \ . \tag{6.122}$$

一般の場, $\psi_\alpha(x)$ に対して, 時間反転は次のように働く.

$$\psi_\alpha(\mathbf{x},t) \xrightarrow{T} \eta T_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{x},-t)\ . \tag{6.123}$$

ここで, η は場の内容を反映した $|\eta|^2 = 1$ を満たす全体の位相因子である. また, $T_{\alpha\beta}$ は（反）交換関係を不変に保つように構成された行列である. この構成の詳細はここでは述べない[5]. また, 荷電共役 C も考えることができる. これは, スピノル場については, 行列 (6.118) で既に定義されている. しかし, この荷電共役の内容を理解するには, 場の量子化を待たねばならない.

6.4 対称性とネーターの定理

この章では, 作用の対称性のために生じる古典論の種々の性質について述べる. 4.3 節では, 作用の対称性には, 古典的なレベルでは保存則がともない, 量子論的なレベルでは行列要素の恒等式がともなうことをしめした. これらのアイデアを古典場の場合に拡張したのがネーター(Noether)の定理[17]である[15].

場の理論の場合の作用の対称性とは, 場とその時空変数の変換で, 作用を不変に保ち, ラグランジアン密度を形式不変に保つものだ. 6.2 節で議論したローレンツ変換とポアンカレ変換は, 場とその変数を同時に変換する例であり, その構成法から明らかに作用を不変に保つ. この節では連続変換のみを考える. これには, 微小変換を扱えるという利点がある. いま微小変換を次のように書く.

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x') = \psi_\alpha(x) + \delta\psi_\alpha(x)\ . \tag{6.124}$$

ここで重要なのは, $\delta\psi_\alpha(x)$ は ψ_α の形の微小変化と座標の次のような変化,

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu \tag{6.125}$$

とを両方含むことだ. 変化分, δx と $\delta\psi_\alpha$ は微小量であり, それらの線形項以上の高次項は, 交差項も含めて無視する.

変換は, 場の形と時空変数, さらに微分をも同時に含む. したがって, 変分は必ずしも作用にある偏微分と可換でない. 例えば, $\delta(\partial_\mu \psi_\alpha) \neq \partial_\mu \delta\psi_\alpha$ である. このため, 変換のうち, 場の汎関数形のみを含み座標の変化分を含まない部分を分離することが重要だ. これは場の第二種の変分として次のように書かれる.

$$\bar{\delta}\psi_\alpha(x) = \psi'_\alpha(x) - \psi_\alpha(x)\ . \tag{6.126}$$

この変分は,

$$\bar{\delta}(\partial_\mu \psi_\alpha) = \partial_\mu \bar{\delta}\psi_\alpha \tag{6.127}$$

という望ましい性質を持っている. これらの 2 つの変分は次のように関係している.

$$\begin{aligned} &\psi'_\alpha(x') = \psi'_\alpha(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \psi_\alpha(x) \\ \Rightarrow\ &\bar{\delta}\psi_\alpha(x) = \delta\psi_\alpha(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi_\alpha(x)\ . \end{aligned} \tag{6.128}$$

任意の微小変換のもとで, ラグランジアン密度は $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x')$ となる. これは (6.128) を使って次のように書かれる.

$$\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) = \bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x)\ . \tag{6.129}$$

第 2 種の変分の定義より,

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\alpha}\,\bar{\delta}\psi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi_\alpha)}\,\bar{\delta}(\partial_\nu\psi_\alpha) \tag{6.130}$$

となることがわかる. (6.127) を使って変分と微分の順序を変え, (6.128) を代入すると, 変換のもとでの $\mathcal{L}$ の変分全体は次のようになることがわかる.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} \ \ = \ \ & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\alpha}\,\delta\psi_\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\alpha}\,(\partial_\mu\psi_\alpha)\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi_\alpha)}\,\partial_\nu\delta\psi_\alpha \\ & - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi_\alpha)}\,\partial_\nu(\partial_\mu\psi_\alpha\delta x^\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu\ . \end{aligned} \tag{6.131}$$

この変換のもとで, 作用 S は次のようになる.

$$S = \int d^4x\,\mathcal{L}(x)\ \to\ S' = \int d^4x'\,\mathcal{L}'(x')\ . \tag{6.132}$$

ここで, 作用の積分領域はミンコフスキー空間の全てとした. もしそうでない場合は, 境界の変化の分だけ積分領域を変えなければならない. もし, この変換が対称性変換ならば, $S = S'$ だ. 微小変換の場合は変換の連続性より,

$$S' = \int \left[d^4x + \delta(d^4x)\right] \left[\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)\right] \tag{6.133}$$

となる. 積分測度の変化は変換のヤコビアンで決められていて, 微小な場合は,

$$\delta(d^4x) = d^4x\,\partial_\mu \delta x^\mu \tag{6.134}$$

となる.

例題 6.26: (6.134) の結果を確かめよ.

この結果, 作用の変化は,

$$\delta S = \int d^4x\ \left(\mathcal{L}\,\partial_\mu \delta x^\mu + \delta\mathcal{L}\right) \tag{6.135}$$

となる. (6.131) を (6.135) に代入して項を整理すると, 作用の変化が以下のように与えられることがわかる.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\,\partial_\mu \left[\left(g^\mu{}_\nu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)}\,\partial_\nu \psi_\alpha\right)\delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)}\,\delta\psi_\alpha\right] \\ &\quad + \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi_\alpha)}\right] \left(\delta\psi_\alpha - \delta x^\mu \partial_\mu \psi_\alpha\right). \end{aligned} \tag{6.136}$$

明らかに, もし ψ_α がオイラー・ラグランジュ方程式の解ならば, 第二の積分はゼロとなる. 第一の積分の被積分関数は発散であり, 括弧の中,

$$J^\mu = \left(g^\mu{}_\nu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)}\,\partial_\nu \psi_\alpha\right)\delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)}\,\delta\psi_\alpha \tag{6.137}$$

は**カレント** (current) と呼ぶ. もし変換が対称性変換ならば, $\delta S = 0$ である. 対称性にともなうカレントをオイラー・ラグランジュ方程式の解について計算すると, (6.136) よりこのカレントが保存すること, つまり,

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{6.138}$$

が成立することがわかる. (6.137) と (6.138) の結果は 4.3 節の力学的な系での結果の拡張になっていて, **ネーターの定理** (Noether's theorem) [17] と呼ばれる.

結果 (6.138) から, J^0 を空間積分をすることによって, **チャージ** (charge) Q を定義できることがわかる. 保存則 (6.138) とガウスの定理から, 次のようになる.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{\mathcal{V}} d^3x \, \frac{\partial}{\partial t} J^0(\mathbf{x}, t) = -\int_{\mathcal{V}} d^3x \, \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = -\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \ . \quad (6.139)$$

ここで S は領域 V を囲む表面である. 場がこの領域の表面でゼロである, または, 領域が空間全部を覆い場が無限遠でゼロになるときは, チャージ Q が時間的に保存することがわかる. そうでないときは, (6.139) は, チャージ Q の領域 $\mathcal{V}$ からの流出または流入を記述する. 特殊相対論に詳しい読者は, チャージ Q を体積積分として定義するのは座標系に依存する操作なので, 不変性について不安に思うかも知れない. 実際, (6.139) で定義した Q は**ローレンツ不変ではない**. これは, 3 次元表面を共変的に表わす 4 元ベクトル S_μ を導入することによって解決する. 静止系ではこの 4 元ベクトルは微小要素 $dS = (d^3x, 0, 0, 0)$ である. 他の系での dS の形は, 静止系からのローレンツ変換で与えられる. チャージの明白なローレンツスカラー形は,

$$Q = \int dS_\mu \, J^\mu \quad (6.140)$$

で与えられる. この定義が, 静止系で (6.139) になることは明らかだろう.

ネーターの定理は, 作用のどの対称性変換についても, それに対応して保存量があるということをしめしている. これは, もし対称性が連続群を構成するならば, 保存量の数は, 群の要素を完全に特定するために必要なパラメータの数と一致していることを意味する. 以下に, 幾つかの重要な対称性にともなうネーターのチャージをあげる.

6.4.1 並進不変性

多くの系では作用は**並進不変** (translational invariant) である. つまり, 作用

にあらわれる全ての場, $\psi_\alpha(x)$ を一定のベクトル a を使って$\psi_\alpha(x-a)$ に置き換えても作用は変化しない. これは, 作用にあらわれるどんな関数も並進不変であるとき, 場の変化が積分領域を不変にするための x の変化によって, 打ち消されるためだ. この変換が微小のとき, 場はその**形**を以下のように変える.

$$\psi'_\alpha(x) = \psi_\alpha(x) + a^\mu \partial_\mu \psi_\alpha(x) \ . \tag{6.141}$$

したがって,

$$\psi'_\alpha(x-a) \equiv \psi'_\alpha(x') = \psi_\alpha(x) \tag{6.142}$$

となる. これより, このとき, $\delta\psi_\alpha = 0$ で, $\delta x^\mu = -a^\mu$ となる.

保存カレントは上の結果を (6.137) に代入すれば簡単に求まって, 以下のようになる.

$$J^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)} \partial_\nu \psi_\alpha - g^\mu{}_\nu \mathcal{L} \right] \delta a^\nu \ . \tag{6.143}$$

括弧の中の表現は通常 $T^\mu{}_\nu$ と書き, **ストレス・エネルギーテンソル** (stress-energy tensor) と呼ぶ. これは, 場の配位が時空内で変化することによるエネルギーと運動量の流れを表わす. a^μ は一定であり, $J^\mu = T^\mu{}_\nu a^\nu$ であるから, a^μ はカレント J^μ の保存になんら役割を果たしていない. したがって, ストレス・エネルギーテンソル自身が $\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ を満たす. このテンソルは極力, 対称テンソル, つまり $T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} T^\rho{}_\nu = T_{\nu\mu}$ を満たすように変形する. それができなければ, 特に角運動量の定義を始めとして理論の物理的な解釈に困難が生じる [5].

時間推進の不変性の場合は, $a^\nu = \epsilon \delta^{\nu 0}$ である. このときは, 量 Q/ϵ は H と書かれて, 次で与えられる.

$$H = \int d^3x \left(\pi_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{L} \right) \ . \tag{6.144}$$

ここで, 正準運動量密度 π_α の定義 (6.12) を使った. 力学と完全に対応がつくことから, H は系のハミルトニアンと見なされ, (6.144) の括弧の中の量は**ハミルトニアン密度**と呼ばれる. 空間推進の場合も同様に扱われる.

例題 6.27: 次の式で与えられる 3 次元ベクトル $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P} = \int d^3x \, \pi_\alpha \nabla \psi_\alpha \tag{6.145}$$

は並進不変な系では保存され, エネルギー・運動量 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ の組合せは 4 元ベクトルとして変換されることをしめせ.

P^μ の物理的な解釈は力学系とのアナロジーに基づいていて, エネルギーは時間推進に関係し, 運動量は空間推進に関係した不変量である. このように, 平行移動を与えるための 4 つのパラメータ a^μ から保存 4 元ベクトルが導かれるのである.

6.4.2 ローレンツ不変性と角運動量

作用のローレンツ変換のもとでの不変性から, 古典的な場の配位の角運動量を導くことができる. これは, 回転はローレンツ群の部分群をなすためである. したがって, この解析では, 場のローレンツ変換性が重要な役割をする.

一般的な場のローレンツ変換は次のように書くことができる.

$$\Psi'_\alpha(x') = D_{\alpha\beta}(\Lambda)\Psi_\beta(x) \, . \tag{6.146}$$

ここで, D はローレンツ群の既約表現の要素である. 上の式 (6.146) は, $x' = \Lambda x \Rightarrow x = \Lambda^{-1}x'$ を使って, 次のように書かれる.

$$\Psi'_\alpha(x) = D_{\alpha\beta}(\Lambda)\Psi_\beta(\Lambda^{-1}x) \, . \tag{6.147}$$

微小変換の場合は, $D_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \delta D_{\alpha\beta}$であり, また (6.33) で定義した$\lambda^\mu{}_\nu$ を使って, $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu - \lambda^\mu{}_\nu x^\nu \equiv x^\mu - \delta x^\nu$ である. これにより場は,

$$\delta\Psi_\alpha(x) = \bar{\delta}\Psi_\alpha(x) = \delta D_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x) - \lambda^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \Psi_\alpha(x) \tag{6.148}$$

と変化する. これらの変化について, ネーターの定理を適用すると, 作用の

ローレンツ不変性にともなうカレントが次のようになることがわかる.

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\alpha)}(\delta D_{\alpha\beta}\Psi_\beta - \lambda^\nu{}_\rho x^\rho \partial_\nu \Psi_\alpha)\,. \tag{6.149}$$

D を空間回転に制限して得られる保存量は, このカレントから求めることができ, これらは, 場の配位の角運動量の成分となる. 4.3 節の解析から, 空間回転は空間座標に, $\delta x^i = \delta\theta^k \epsilon^{kij} x^j = \lambda_{ij} x^j$ （θ^k は微小な回転角）と働く連続群をなすことがわかっている. (6.32) で与えられる空間回転とローレンツ変換 Λ の関係から, 微小ローレンツ変換のパラメータは回転のパラメータと一致することがわかる. したがって, ローレンツ変換のパラメータをこの部分集合に制限して, 回転にともなう保存カレントが得られる. 更に, 場の変換性を正確に決めれば, δD の形が決まり, 実際の計算を実行することができる.

スカラー場の場合は $\delta D = 0$ であり, (6.149) の二番目の部分は以下のようになる.

$$J^\mu = \delta\theta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \varepsilon^{ijk} x^j \partial_k \phi\,. \tag{6.150}$$

$\delta\theta^i$ は 3 つの任意定数からなっているので, (6.150) は 3 つの保存カレントを与える. これらにともなうチャージは, 次の式で与えられる.

$$L^i = \int d^3x\, \varepsilon^{ijk} \pi x^j \partial_k \phi\,. \tag{6.151}$$

これらの量は無次元で回転にともなった量であり, 量子力学でよく知られているように回転に対する不変性から軌道角運動量が導かれるので, (6.151) はスカラー場の**軌道角運動量** (orbital angular momentum) と呼ばれる. スカラー場は, 軌道部分以外に角運動量を持たず, このため, スカラー場は**スピンを持たない** (spinless) という.

ディラック場の角運動量については, (6.53) で与えられる場の形に対する微小ローレンツ変換が空間回転のみに制限されたとき, 次の形で与えられる.

$$\delta U_{ab} = \tfrac{1}{4} i\, \delta\theta^j \varepsilon^{jkm} \sigma^{km}_{ab}\,. \tag{6.152}$$

定義, $\sigma^{jk} = \frac{1}{2}i[\gamma^j, \gamma^k]$ とディラック表現を使って,

$$\sigma^{ij} = -\varepsilon^{ijk} S^k \,, \quad S^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \tag{6.153}$$

がわかる. (6.153) を (6.152) に代入して, 更に恒等式 $\epsilon^{jkl}\epsilon^{jkm} = 2\delta_{lm}$ を使うと, (6.152) は次のようになる.

$$\delta U_{ab} = -\frac{1}{2} i \, \delta\theta^k S^k \,. \tag{6.154}$$

ディラックの作用 (6.90) から, $\pi = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger$ がわかる. これをネーター・チャージの定義に適用すると, ディラック場の**全**角運動量が,

$$J^k = \int d^3x \, \psi^\dagger (\tfrac{1}{2} S^k + i\varepsilon^{kjm} x^m \partial_j) \psi \tag{6.155}$$

であり, $\frac{1}{2}S^k$ がディラック場の, 内部, または**スピン**角運動量と見なせることがわかる. このように, 全角運動量は軌道とスピンの角運動量の和である. (6.96) と (6.97) のディラック方程式の静的な解は, $\frac{1}{2}S^3$ の $\pm\frac{1}{2}$ の固有状態に対応する. $\frac{1}{2}S^k$ とヘリシティの関係は, 6.5 節で, またベクトル場の内部角運動量は 7 章で議論する.

6.4.3 位相とカイラル不変性

多くの場合, 作用は, **第一種のゲージ変換** (gauge invariance of the first kind), つまり複素場の位相を任意の**一定の**位相だけ変化させる変換の元で不変である. 例えば, 作用 (6.67) は, 変化 $\phi \to e^{i\lambda}\phi$ の元で不変だ. また, スピノルの作用 (6.68) と (6.90) も同様の対称性を持つ. λ が微小のとき, この変換は場の形の微小な変化

$$\bar{\delta}\Psi_\alpha = i\lambda\Psi_\alpha = \delta\Psi_\alpha \tag{6.156}$$

となり, カレント

$$J^\mu = i\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\alpha)} \Psi_\alpha \tag{6.157}$$

を与える. 因子 $i\lambda$ は重要でないので落とし, ディラックの作用 (6.90) を使うと, カレント (6.157) は $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ を与える. これは 2 重スピノル場の電流と一致することを 7 章でしめす.

ディラックの作用は, もう一つの興味ある不変性を持っている. 質量ゼロの極限, $m = 0$, では, この理論は **カイラル変換** (chiral transformation),

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{6.158}$$

に対して不変である.

> **例題 6.28**: 質量の無いディラック作用はカイラル変換の元で不変であることを証明せよ. また, この不変性にともなう保存カレントを求めよ.

2 重スピノル場のカイラル不変性は, 理論に質量が無いことによっている. このために, カイラル不変性が無いことは, 2 重スピノルに質量があることを示唆しているといえる.

6.4.4　対称性変換演算子としてのチャージ

この節での保存則の議論は古典的な場合に限られている. したがって, 量子論での正当性は, 十分に解析を進めた上で, 別個に議論されなければならない. しかしながら, 量子論を詳しく知っていなくても, 議論できる点がある.

対称性にともなうチャージは, それぞれ, 4.4 節で調べた量子力学的な場合と同じように対称性の**生成子** (generater) の役割をする. これは, $\psi_\alpha \to \psi_\alpha + \delta\psi_\alpha$ の形の変化にともなう対称性については簡単にしめせる. ネーターの定理により, そのような対称性ではチャージは,

$$Q = \int d^3x\, \delta\psi_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_\alpha)} \tag{6.159}$$

で与えられる. しかしながら, 6.1 節より, ψ_α に正準な運動量は,

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_\alpha)} \tag{6.160}$$

で与えられるから, チャージは,

$$Q = \int d^3x\, \delta\psi_\alpha \pi_\alpha \tag{6.161}$$

と書ける. (6.11) の正準交換関係を一般化した形,

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\pi_\beta(\mathbf{y},t)] = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{6.162}$$

を使うと,

$$i[Q,\psi_\alpha(\mathbf{y},t)] = \int d^3x\,\delta\psi_\alpha(\mathbf{x},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \delta\psi_\alpha(\mathbf{y},t) \tag{6.163}$$

がわかる. ここで, $\delta\psi_\alpha$ は ψ_α と可換であるとした. また, 上ではチャージの保存則よりチャージを定義する積分中の場の時間変数は, 交換関係をとる場と同時刻になるようにずらすことができるとして計算した. これらの範囲内で, Q は対称性変換を生成することがわかる.

例題 6.29: 同時刻交換関係を同時刻反交換関係で置き換えても, 依然として (6.163) が成立するための条件を求めよ.

6.5 正準量子化

この本は量子過程の経路積分法についてのものであり, このようなアプローチは, しばしば, 場の "正準" 量子理論と対照的なものと見なされる. しかしながら, 実際は前者は物理的な解釈について後者に依存している. これは, 場と粒子の関係を理解するのは, 正準量子化の枠内でのみ可能であるためだ. 経路積分は場の理論を解析するために非常に強力ではあるが, そうして得られた結果の究極的な解釈は, 正準量子化の方法とそれに基づいた物理的理解に頼っているわけだ.

正準量子化は, 場の方程式と量子化条件, つまり同時刻交換関係 (6.11) の (反交換関係を使う場合もいれた) 一般化,

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\pi_\beta(\mathbf{y},t)]_\pm = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{6.164}$$

を満たす解を見つけることからなる. もちろん, これは, 場合ごとに行わなければならない. しかし, このアプローチの基礎は 5.5 節で導入したモード展

開である. 以下で, 今までに調べたスカラー場とディラック場についてこのような解析を行う.

6.5.1 スカラー場の量子化

作用 (6.63) を持つ実のスカラー場では, 場に正準共役な運動量は, $\pi = \dot{\phi}$ で与えられる. 場のモードは, $(\Box + m^2)\phi = 0$ を満たさなければならない. 場が時空の全領域で定義されているとき, モードとして平面波 $e^{\pm ipx}$ $(p_0 = \epsilon_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$ をとる. ϕ の一般的なモード展開を, 次のように書く.

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_p}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} \right) . \tag{6.165}$$

関係 $\dot{\phi} = \pi$ から,

$$\pi(x) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\epsilon_p}{2}} \left(a^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} \right) \tag{6.166}$$

となる. 交換関係,

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{k}}] = [a^\dagger_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{k}}] = 0\,, \quad [a_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{k}}] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \tag{6.167}$$

を仮定すると, 同時刻交換関係は,

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{6.168}$$

と計算されて, 量子化条件が満たされていることがわかる.

演算子 a_p と $a^\dagger_p$ はそれぞれ消滅演算子と生成演算子として解釈される. 次の式を満たす真空状態 $|0\rangle$ を導入する.

$$\langle 0| a^\dagger_{\mathbf{p}} = 0\,, \quad a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0\,. \tag{6.169}$$

状態 $|\mathbf{p}\rangle = a^\dagger_p |0\rangle$ は次の式を満たす.

$$\langle\, 0 \,|\, \mathbf{p} \,\rangle = 0\,, \quad \langle\, \mathbf{p} \,|\, \mathbf{k} \,\rangle = \langle 0| a_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k})\,. \tag{6.170}$$

これらの状態の物理的な内容を理解するために, エネルギー・運動量演算子 (6.144) と (6.145) をこれらの状態に施すとどうなるか求めてみよう. (6.144) で定義されるハミルトニアンは, ϕ と π で次のように書かれる.

$$H = \int d^3x \left(\tfrac{1}{2}\pi^2 + \tfrac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 \right) . \tag{6.171}$$

例題 6.30: ϕ と π のモード展開から, 次の式が成立することをしめせ.

$$H = \tfrac{1}{2} \int d^3p\, \epsilon_p \left(a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}} \right) . \tag{6.172}$$

ここで, **正規積** (normal ordering) の概念を導入しよう. これは単に, 消滅演算子があらわれる全ての項ですべての消滅演算子を右に持ってくることを意味する. ハミルトニアンの正規積は $:H:$ と書き, 次のようになる.

$$:H: = \int d^3p\, \epsilon_p\, a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} . \tag{6.173}$$

したがって, 全ハミルトニアンは

$$H = :H: + E_0 , \quad E_0 = \tfrac{1}{2}\delta^3(0) \int d^3p\, \epsilon_p \tag{6.174}$$

となる. E_0 は明らかに発散し, 空間の体積 $\delta^3(0)$ に比例する. この量は, $H\,|0\rangle = E_0\,|0\rangle$ となることから, 真空のエネルギーを意味することがわかる. 6.1 節では場の理論を導く力学的モデルが無限個の調和振動子の集まりであることを述べたが, それぞれの調和振動子が量子化されたときに基底状態のエネルギーに 0 でない寄与を与えることを考えれば, この事情は理解できる. 実際には, 一般に物理的な過程ではエネルギーの差のみが問題で, この理由から, E_0 は捨て去られる. ただし, これには一般相対性理論 [18] という重要な例外がある. それは, 一般相対性理論では, 基底状態のエネルギーが時空の全体の振舞いに影響するからだ. これは, アインシュタインの一般相対性理論での重力の量子化が非常に困難な理由の一つとなっている.

空間の運動量演算子 $\mathbf{P}$ も同様に見つけられて, 次のように与えられる.

$$\mathbf{P} = \int d^3x\, \pi \nabla\phi = \int d^3p\, \mathbf{p}\, a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} . \tag{6.175}$$

ここでは $\delta^3(0)\int d^3p\,\mathbf{p}$ の形の項は有限体積で計算して極限を取ることによって, 0 となった.

そこで, 状態 $|\mathbf{p}\rangle$ が次の式を満たすことが容易にわかる.

$$:\!H\!:|\mathbf{p}\rangle = \epsilon_p\,|\mathbf{p}\rangle\ ,\quad \mathbf{P}\,|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\ . \tag{6.176}$$

したがって, 状態 $|\mathbf{p}\rangle$ はエネルギー ϵ_p, 運動量 $\mathbf{p}$ の 1 粒子状態と自然に解釈できる. この多粒子状態への拡張は簡単で, 1 粒子状態のテンソル積をとればよい. つまり, n 粒子状態は次のように与えられる.

$$|\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}_1}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}\,|0\rangle\ . \tag{6.177}$$

(6.177) の形の状態全ての空間は, 理論の**フォック空間** (Fock space) 表現と呼ばれる [19]. この多粒子状態は, 例題 6.27 で導入したエネルギー・運動量演算子 P_μ の固有状態となっていて, 固有値はそれぞれの 1 粒子状態の固有値の和で与えられることは簡単に確かめられる. また 4.4 節のように, $a^\dagger_p a_p$ という組み合わせは状態の中の 4 元運動量 p を持つ粒子の数をかぞえる演算子として働く.

(6.177) の規格化を使って, フォック空間が単位射影演算子を持つことがしめせる.

$$\sum_{j=0}^{\infty}|j\rangle\langle j| = 1\ . \tag{6.178}$$

ここで, n 番目の項は

$$|n\rangle\langle n| = \int d^3p_1\cdots d^3p_n\ |\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n\rangle\langle\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n| \tag{6.179}$$

で与えられる.

例題 6.31: (6.178) を確かめよ.

例題 6.32: 次の式をしめせ.

$$[P_\mu,\phi] = -i\partial_\mu\phi\ . \tag{6.180}$$

(6.180) の結果は, 量子力学でなじみのある形式が量子場の理論で共変的に一般化されることを意味している.

6.5.2 ディラック場の量子化

ディラック場の場合も, 今までと同様の過程を実行することができる. (6.109) のモード展開,

$$\psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\epsilon_p}} \left[b^s_{\mathbf{p}} u_s(p) e^{-ipx} + d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v_s(p) e^{ipx} \right] \tag{6.181}$$

をハミルトニアン,

$$H = -i \int d^3x \, \bar{\psi} (\gamma \cdot \nabla + im) \psi \tag{6.182}$$

に代入する.

> **例題 6.33**: 展開 (6.181) と (6.104) – (6.107) の結果を使うとハミルトニアンは次のように与えられることをしめせ.
>
> $$H = \int d^3p \, \epsilon_p \left(b^{s\dagger}_{\mathbf{p}} b^s_{\mathbf{p}} - d^s_{\mathbf{p}} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \right) . \tag{6.183}$$

正規積のハミルトニアンが正の固有値を持ち, また展開 (6.181) で d_p が消滅演算子として解釈できるためには, 演算子 b と d は反可換性を持たなければならない. 代数

$$\begin{aligned} \{b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}, b^{s'(\dagger)}_{\mathbf{k}}\} = \{b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}, d^{s'\dagger}_{\mathbf{k}}\} = \{d^{s(\dagger)}_{\mathbf{p}}, d^{s'(\dagger)}_{\mathbf{k}}\} = 0 \, , \\ \{b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}, b^{s'}_{\mathbf{k}}\} = \{d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}, d^{s'}_{\mathbf{k}}\} = \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{6.184}$$

を仮定すると, $|\mathbf{p}, s\rangle = b^{s\dagger}_p |0\rangle$ と $|\bar{\mathbf{p}}', s\rangle = d^{s'\dagger}_p |0\rangle$ の状態が正規積のハミルトニアンの正の固有値 ϵ_p を持つ固有状態となる. 正規積を作ると, ハミルトニアンには発散する負のエネルギー部分があることがわかる. これはハミルトニアンから差し引かれなければならない. このいわゆる負のエネルギーのディラックの海は, 完全性のために負のエネルギーの解も含まなければなら

ないことによる．上の反交換関係から次のような場の同時刻反交換関係が導かれる．

$$\{\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}=i\delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ . \tag{6.185}$$

ここで, a,b は 2 重スピノルの添字を意味する．

> **例題 6.34**: (6.185) をしめせ．

粒子状態の添字 s は, ヘリシティ Σ を使って理解することができる．このヘリシティはスピン演算子 $\frac{1}{2}S^j$ の定義 (6.153) を使って次のように構成される．

$$\Sigma=i\frac{1}{m}\int d^3x\,\psi^\dagger\tfrac{1}{2}S^j\partial_j\psi=\int d^3p\,\tfrac{1}{2}\frac{p^j}{\epsilon_p}\left(b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\sigma^j_{ss'}b_{\mathbf{p}}^{s'}-d_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\sigma^j_{ss'}d_{\mathbf{p}}^{s'}\right)\ . \tag{6.186}$$

> **例題 6.35**: (6.186) にあらわれる 2 番目の積分の形を確かめよ．また, $[\Sigma,H]=0$ をしめせ．

粒子の運動量が x^3 軸を向いているとき, $s=(1,2)$ の状態は固有値 $\pm\frac{1}{2}$ を持つ Σ の固有状態になることは簡単に確かめられる．したがって, s はこの場の粒子のヘリシティ, 大雑把にいってスピンに相当する．Σ はハミルトニアンと可換なので, ヘリシティはエネルギーと運動量を含む観測量の集合に入れる．

> **例題 6.36**: ディラック場のエネルギー・運動量演算子の構成を完成させて, スピノル場の反可換性にもかかわらず交換関係 $[P_\mu,\Psi]=-i\partial_\mu\Psi$ が成立することをしめせ．

多粒子状態はスカラー場のときと同様に構成できる．しかし, 反交換関係のもう一つの直接の結果として, $(b_p^{s\dagger})^2\,|0\rangle=0$ がある．このため, 二つの粒子が同じエネルギー, 運動量とスピンを持つという状態は存在しない．この性質は, **排他律** (exclusion principle) と呼ばれ, これらの粒子の統計性に本質的

に影響する．このような振舞いをする粒子は**フェルミ粒子** (fermion) と呼び，それが従う統計をフェルミ・ディラック統計という．スカラー粒子のように交換関係に従う粒子にはそのような制限は無い．このため，スカラー粒子はボーズ・アインシュタイン統計に従い，**ボーズ粒子** (Boson) という．これらの結果は，厳密で一般的な**スピン・統計定理** [20,21] に昇華されている．この定理によれば，3 次元空間では，粒子の統計性はそのスピンで決まっている．整数スピンの粒子は全てボーズ・アインシュタイン統計に従い，半整数スピンの粒子は全てフェルミ・ディラック統計に従う．スピン・統計定理は，4 次元でのローレンツ不変性，運動方程式の局所性と状態の正定値性という一般的な仮定から証明される．低次元ではこの結果は成立せず，スピンと統計の変わった関係も起こり得る．またこれは，フォック空間が不定計量を持っていて，0 や負のノルムを持つ状態があるときにも起こり得る．実際，このような状態はゲージ理論で起こり，そこでは確率解釈を成立させるためには注意を要する．7 章では，ゲージ理論にゼロノルム状態があるために，反交換関係を使って量子化しなければならないスカラー場が登場する．

ディラックの原論文 [3] では，$b_s^\dagger$ で作られる状態は電子と見なされた．そして，$d_s^\dagger$ はその**反粒子** (antiparticle)，陽電子と見なされた．陽電子は，質量とスピンは電子と同じであるが，7 章でみるように，その電荷は電子と反対である．場の理論を量子化したときに反粒子があらわれることは相対性理論の直接の結果だ．この節で調べた実スカラー場のように，理論によっては粒子と反粒子は同じである．荷電共役演算子 C は，場の展開で粒子と反粒子を交換する演算子として定義される．荷電共役行列はスピノル場について (6.118) で既に定義されていて，粒子と反粒子の交換は変換

$$\psi \xrightarrow{C} \eta C \bar{\psi}^T \tag{6.187}$$

で与えられる．ここで，$\bar{\psi}^T$ は $\bar{\psi}$ の転置であり，η は位相因子である．この変換は，左ねじ回転のニュートリノを右ねじ回転のニュートリノに変える．荷電共役，空間反転，時間反転を同時にする変換，CPT 変換は自然の基本的な対

称性であることは基本的で一般的な定理だ [21]. 個々の対称性は, 弱相互作用のパリティとか, K 中間子の CP のように, 破られることもあるが, CPT の破れはいまだかつて観測されていない.

例題6.37: 複素スカラー場 (6.67) を量子化し, 状態を構成せよ. 軌道角運動量演算子を求めよ.

例題6.38: ワイルスピノルの作用 (6.69) を量子化し, 状態を構成せよ. またそのヘリシティを決定せよ.

6.6 S 行列

この節では, 粒子間相互作用のダイナミクスを S 行列形式を使って取り扱う [22]. これまでの議論では, 場はハイゼンベルグ描像での演算子であり, そのため, フォック空間は時間に依存していなかった. これらの状態はハミルトニアンの正確な固有状態であるから, シュレーディンガー描像での時間依存性は非常に単純で, $|\psi, t\rangle = \exp(-iE_\psi t)\,|\psi, 0\rangle$ となる. その結果, シュレーディンガー描像で正規直交する状態は, 時間が進んでも正規直交したままである. したがって, いままでの 2 次形式の作用を量子化した理論は, 相互作用しない, **自由な**場の理論になっている.

粒子間の相互作用を許すためには, 場について 3 次, またはより高次の非線形項を導入する必要がある. もちろん, これらの項は相対論的に不変でなければならない. また, これまでに発展させたハミルトニアン, 角運動量, 運動量のような形式はその物理的な解釈を変えないことも明らかだ. しかし, これらの量は, 運動方程式の解であり同時刻正準（反）交換関係を満たす場を使って計算されなければならない. 残念ながら, 非線形性と量子化条件を同時に課すと, 厳密な解は通常, 自由な線形の場の理論のようには求まらない. 幾つか重要な例外もあるが, ほとんどの厳密に解ける例は低次元時空で

のものである．相互作用があり厳密に解ける例として，シュウィンガー模型 (Schwinger model) を 9 章で議論する．

場の理論を解くために最もよく使われるテクニックは摂動論だ．この方法では，厳密解は対応する自由場の解を使って構成する．しかし，実験的に観測されている粒子は，ある限界内ではあるが，前の節で導入したフォック空間に住んでいるように見える．したがって，このときにまず，厳密場が，そのような現実の粒子とどう関係しているかを問題としなければならない．これは，厳密場の振舞いについて**漸近条件** (asymptotic condition) を課すことで解決する．簡単のために，ここではこの条件をスカラー場について述べる．一般的な場合への拡張はそれ程難しくはない．

まず，作用 $\mathcal{L}(\Phi)$ があって，その中の線形，または二次の項を全て集めて $\mathcal{L}_0$ と呼ぶことにする．この $\mathcal{L}_0$ は，これまでに議論した方法とそれを組み合わせたやり方で，正確に解ける理論に相当しているとする．この解ける理論の場を $\phi(x)$ と呼び，この場にともなうフォック空間の粒子状態は，とりあえず，質量を持っているとする．しかしながら，本当に興味があるのは，場 $\Phi(x)$ で，この場が全作用によって定義される非線形問題の解であり，また，正準交換関係を満たす．非線形性のせいで，場 Φ にともなう粒子状態は自明でない性質を持つと考えられる．その一つはシュレーディンガー表示での異なる粒子状態が，時間が変化すると直交しないということだ．内積の確率振幅解釈を使うと，この状況は，粒子の散乱や，粒子生成，崩壊のような観測できる遷移に相当することがわかる．したがって，問題は，シュレーディンガー表示での粒子状態の異なる時間での重なりを計算することに帰着する．

場の理論での散乱理論でのレーマン・シマンチック・チンマーマン (Lehman-Symanzik-Zimmermann, LSZ) [23] 形式では，**漸近場** (asymptotic fields) ϕ_{in}, ϕ_{out} が存在するとする．これらの漸近場は，簡単な $\mathcal{L}_0$ の理論を解いて得られる良く定義されたフォック空間をともなう．これらの場は通常自由であって，完全な相互作用する場の粒子が散乱領域に入る前か，出てきた後の状態をあらわす．したがって，場 Φ の $t \to \pm\infty$ に相当する．LSZ 形式では，これら

の漸近場は, 場 Φ と次のように関係している. もし $f(x)$ が $(\Box+m^2)f=0$ の波束解ならば, Φ の漸近極限は, 次の式を満たす.

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int d^3x\, f(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\,\Phi(x)-\sqrt{Z}\int d^3x\, f(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\,\phi_{\rm out}(x)\right)=0\,. \quad (6.188)$$

また, $t\to-\infty$ のときも $\phi_{\rm in}$ を使って同様な式が成り立つ. (6.188) では, $\overleftrightarrow{\partial}$ は,

$$f\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\,g \equiv f\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}g \quad (6.189)$$

を意味し, Z は**波動関数のくりこみ定数** (wave-function renormalization) と呼ばれる. この定数の必然性はすぐ後に述べる. (6.188) の極限は弱い意味で理解される, つまり, 演算子の行列要素に対してこの式が成立すると理解されるべきだ. (6.188) の中に Z があるために, 場 Φ が**くりまれていない場** (unrenormalized field) となる.

(6.188) の関係は漸近場を定義するには役立つが, その漸近場の形やどのような粒子が含まれているかは仮定していない. 理論に存在する粒子は, 漸近的な in 場と out 場のモードが決める, 自由な場 ϕ と同様なフォック空間と関連している. それらのフォック空間を $|\alpha\rangle_{\rm in}$ と $|\beta\rangle_{\rm out}$ と書く. これらの状態は (6.188) で f に適切な形を選び, それによって, in 状態や out 状態に働く生成演算子, 消滅演算子が定義されると仮定して得られる. たとえば, もし理論が漸近領域で異常な振舞いをしなければ, f を

$$f(x)=f_{\mathbf p}(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\epsilon_p}} \quad (6.190)$$

と選ぶことによって, 生成演算子,

$$\begin{aligned}|\mathbf{p},\alpha\rangle_{\rm in}&=a^\dagger_{\rm in}(\mathbf{p})\,|\alpha\rangle_{\rm in}\\ &=-\frac{i}{\sqrt{Z}}\lim_{t\to-\infty}\int d^3x\, f_{\mathbf p}(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\,\Phi(x)\,|\alpha\rangle_{\rm in}\end{aligned} \quad (6.191)$$

が定義されるとする. ここで, α はその状態にある他の全ての粒子を意味する. (6.191) の結果は, 漸近場が自由なスカラー場に一致するときは確かに正

しい．したがって, 6.4 節のスカラー場の議論と同様に, (6.191) の複素共役をとって消滅演算子 $a_{\mathrm{in}}(\mathbf{p})$ を定義することができる．, また同様に out 状態の生成・消滅演算子も定義できる．in 状態と out 状態は, 共に完全系を張ると仮定し, またゲージ場を考えるまでは, ノルムは正定値であるとする．

量子的過程の遷移要素は ${}_{\mathrm{out}}\langle\beta|\alpha\rangle_{\mathrm{in}}$ として定義される．そして, この要素は, 規格化定数を除いて, 2 つの状態の間の遷移の確率振幅として解釈される．これから, 散乱断面積や寿命などの測定できる物理量が求められる．in 状態と同じ性質を持つ out 状態, つまり, (6.191) の意味で同じ f を使って得られる out 状態との間には写像 S があって, $S\,|\alpha\rangle_{\mathrm{in}} = |\alpha\rangle_{\mathrm{out}}$ が満たされていると仮定する．S 演算子の行列要素は,

$$
{}_{\mathrm{out}}\langle\,\beta\,|\,\alpha\,\rangle_{\mathrm{in}} = {}_{\mathrm{in}}\langle\beta|\,S^\dagger\,|\alpha\rangle_{\mathrm{in}} \equiv S^\dagger_{\beta\alpha} \tag{6.192}
$$

となる．in 状態と out 状態が完全系をなすことから, 次の式が成立することがわかる．

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathrm{in}}\langle\,\alpha\,|\,\beta\,\rangle_{\mathrm{in}} &= \sum_{n(out)} {}_{\mathrm{in}}\langle\,\alpha\,|\,n\,\rangle\langle\,n\,|\,\beta\,\rangle_{\mathrm{in}} \\
&= \sum_{n(in)} {}_{\mathrm{in}}\langle\alpha|\,S\,|n\rangle\,\langle n|\,S^\dagger\,|\beta\rangle_{\mathrm{in}} = {}_{\mathrm{in}}\langle\alpha|\,SS^\dagger\,|\beta\rangle_{\mathrm{in}}\ .
\end{aligned} \tag{6.193}
$$

これは, S 演算子がユニタリーであることを意味する．この S 演算子のユニタリー性は, ある始状態から終状態全てへの全遷移確率が 1 である, つまり確率が保存することを意味している．in 状態 $|\alpha\rangle_{\mathrm{in}}$ のノルムを $|N_\alpha|^2$ と書くと, S 演算子のユニタリー性は,

$$
1 = \frac{1}{|N_\alpha|^2}\,{}_{\mathrm{in}}\langle\,\alpha\,|\,\alpha\,\rangle_{\mathrm{in}} = \frac{1}{|N_\alpha|^2}\sum_n |{}_{\mathrm{out}}\langle\,n\,|\,\alpha\,\rangle_{\mathrm{in}}|^2 = \frac{1}{|N_\alpha|^2} S_{\alpha n} S^\dagger_{n\alpha} \tag{6.194}
$$

にしたがって確率を保存する．

in 状態と out 状態は, 場 ϕ_{in} と ϕ_{out} から作られているから, S 演算子はこれらの場の間の写像であることがわかる．

例題6.39: S 演算子が次の式を満たすことをしめせ.

$$S\phi_{\rm out}S^{-1} = \phi_{\rm in}\ . \tag{6.195}$$

これまでの仮定を使って, S 行列を相互作用するハイゼンベルグ場で書きあらわすことができる. この表式を, ある一般的な式をまず導いて, それを漸化的に応用して導こう. そのための出発点は, 一般的な式

$$W = {}_{\rm out}\langle\alpha|\, T\{\Phi(x_1),\ldots,\Phi(x_n)\}\,|\mathbf{p},\beta\rangle_{\rm in} \tag{6.196}$$

である. ここで T は場の時間順序積であり, 2.1 節での量子力学のハイゼンベルグ場の時間順序積とまったく同じものだ. スカラー場の時間順序積は次式で与えられる.

$$T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} = \theta(t_1-t_2)\phi(x_1)\phi(x_2) + \theta(t_2-t_1)\phi(x_2)\phi(x_1)\ . \tag{6.197}$$

(6.196) の in 状態は, 運動量 $\mathbf{p}$ の粒子を含んでいるが, この粒子は, 状態から抜き取ることができる. それには, W を次のように書き換えれば良い.

$$\begin{aligned} W = &\ -\frac{i}{\sqrt{Z}}\lim_{t\to-\infty}\int d^3x\, f_{\mathbf{p}}(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\ {}_{\rm out}\langle\alpha|\, T\{\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\}\Phi(x)\,|\beta\rangle_{\rm in} \\ = &\ -\frac{i}{\sqrt{Z}}\lim_{t\to-\infty}\int d^3x\, f_{\mathbf{p}}(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\ {}_{\rm out}\langle\alpha|\, T\{\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\}\Phi(x)\,|\beta\rangle_{\rm in} \\ &+\frac{i}{\sqrt{Z}}\lim_{t\to+\infty}\int d^3x\, f_{\mathbf{p}}(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\ {}_{\rm out}\langle\alpha|\, \Phi(x)T\{\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\}\,|\beta\rangle_{\rm in} \\ &-\frac{i}{\sqrt{Z}}\lim_{t\to+\infty}\int d^3x\, f_{\mathbf{p}}(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\ {}_{\rm out}\langle\alpha|\, \Phi(x)T\{\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\}\,|\beta\rangle_{\rm in}\ . \end{aligned} \tag{6.198}$$

ここで, $f_{\mathbf{p}}$ は局所化した波束を表わすように選んだとする. 時間順序積の定義と, 極限操作のおかげで, 場 $\phi(x)$ を時間順序積の中に移すことができる.

$$\lim_{t\to+\infty} T\{\phi(x)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\} = \lim_{t\to+\infty}\phi(x)T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}\ . \tag{6.199}$$

その結果, (6.198) の最初の二つの項は一緒にして,

$$\left(\lim_{t\to+\infty}-\lim_{t\to-\infty}\right)\int d^3x\, f_{\mathbf{p}}(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\ {}_{\text{out}}\langle\alpha|\,T\{\Phi(x)\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\}\,|\beta\rangle_{\text{in}}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\, f_{\mathbf{p}}(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\ {}_{\text{out}}\langle\alpha|\,T\{\Phi(x)\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\}\,|\beta\rangle_{\text{in}} \tag{6.200}$$

と書ける. (6.189) の定義と,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_{\mathbf{p}}(x)=\left(\nabla^2-m^2\right)f_{\mathbf{p}}(x) \tag{6.201}$$

を使うと, (6.200) を部分積分して, ∇^2 を f_{p} から場の演算子へ移すことができる. f が局所的であるので, 表面項は落とせて, 次の W の最終的な形が得られる.

$$\begin{aligned} W &= \frac{i}{\sqrt{Z}}\int d^4x\, f_{\mathbf{p}}(x)\left(\Box+m^2\right){}_{\text{out}}\langle\alpha|\,T\{\Phi(x)\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\}\,|\beta\rangle_{\text{in}} \\ &\quad - {}_{\text{out}}\langle\alpha|\,a^{\dagger}_{\text{out}}(\mathbf{p})T\{\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\}\,|\beta\rangle_{\text{in}}\ . \end{aligned} \tag{6.202}$$

(6.202) の第二項は out 状態に同じ運動量の粒子が無い限り消える. そのような条件は, 量子過程で影響されない粒子があることに対応し, **前方散乱** (forward scattering) と呼ばれる. 通常, このような項は無視する. しかし, in 状態と out 状態がコヒーレント状態であることもあって, これらの状態が異なっていても, このようなときは前方散乱項は必ずしも消えない. コヒーレント状態は 6.8 節で論じることにして, ここでは前方散乱項は無視する.

(6.202) の結果を漸化的に使うことで, in 状態の全ての粒子を場の演算子に変えることができる. また, 複素共役分だけ違う同様の式を用いて, out 状態の粒子についても同様の操作が行なえる. この操作は, in 状態も out 状態も真空状態 $|0\rangle$ に帰着したときに終る. in 状態でも out 状態でも真空は同じものだとすると, 最終的な結果は次のようになる.

$${}_{\text{out}}\langle\,\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_r\,|\,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n\,\rangle_{\text{in}}=$$

$$\frac{i^{n+r}}{Z^{(n+r)/2}}\int d^4x_1\cdots d^4x_{n+r}\,f^*_{\mathbf{k}_1}(x_1)\cdots f_{\mathbf{p}_n}(x_{n+r})$$
$$\times\left(\Box_1+m^2\right)\cdots\left(\Box_{n+r}+m^2\right)\langle 0|\,T\{\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_{n+r})\}\,|0\rangle\ . \quad (6.203)$$

例題6.40: (6.203) を確かめよ.

スピノルについても, ほとんど同じ議論から同様の漸化式を得ることができる. たとえば, くりこまれていないスピノル場が漸近的に$\Psi\to\sqrt{Z_2}\psi$ を満たすとして, 入射電子状態を次のように定義できる.

$$\begin{aligned} b^{s\dagger}_{\rm in}(\mathbf{p}) &= \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\int d^3x\,\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{\epsilon_p}}e^{-ipx}\Psi^\dagger(x)u_s(p) \\ &\equiv \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\int d^3x\,\Psi^\dagger_a(x)U^a_s(p,x)\ . \end{aligned} \quad (6.204)$$

ここで, $u_s(p)$ は (6.100) で定義した自由解のスピノル部分である. もちろん, 陽電子生成演算子についても $v_s^\dagger$ と Ψ を使って, 同様の表式が書ける. ただ, 反可換性のために, ディラック場の時間順序積の定義を次のように変える必要がある.

$$T\{\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\}=\theta(t_1-t_2)\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)-\theta(t_2-t_1)\psi_b(x_2)\psi_a(x_1)\ . \quad (6.205)$$

そうすれば, 前方散乱を無視して, 次のような式が成立することがしめせる.

$$\sqrt{Z_2}\ {}_{\rm out}\langle\alpha|\,T\{\Psi_{a_1}(x_1)\cdots\}\,|\mathbf{p},s,\beta\rangle_{\rm in}=$$
$$-\int d^4x\ {}_{\rm out}\langle\alpha|\,T\{\Psi^\dagger_a(x)\Psi_{a_1}(x_1)\cdots\}\,|\beta\rangle_{\rm in}\left(\overleftarrow{\not\partial}-im\right)U^a_s(p,x)\ . \quad (6.206)$$

例題6.41: (6.206) を確かめ, さらに, 陽電子状態についての漸化式を導け. また, 粒子を完全に状態から抜き出した行列要素の式を書き下せ.

S 行列は, これによって, 局所的な場の演算子を使って書き下せた. もし, 場の解がわかっていたら, それを使って量子過程の計算を実行することができる. しかし, 残念ながら, 今まで調べた自由な場の理論以外で厳密に解ける例は非常に僅かしか知られていない. その厳密に解けるとわかっている相互作

用する場の理論でも, 4 次元ミンコフスキー空間での例は無い. また, この節で述べた LSZ 漸化法にも, 概念的に困難なところがある. たとえば, この方法では, 観測される粒子と理論の場とに 1 対 1 の対応があるとしている. ところが, 量子色力学では, フォック空間を作るはずの粒子が, 大雑把にいって, 決して壊れることのない束縛状態に**閉じ込め** (confinement) られているので, この性質は破られていると広く考えられている. 残念ながら, この 3+1 時空での QCD では, 高速な計算機と経路積分が閉じ込めの有力な証拠を提供してはいるものの, 閉じ込めは解析的には証明されていない.

また, LSZ 形式では, 一部または全ての場が質量の無い粒子に対応している場合にも問題が起こる. そのような場は, 長距離で, 無限遠まで続くクーロン場のようなポテンシャルをともなう. このような場合には, 漸近的な時間で全ての相互作用が無視できるとは言えない. この事情は, 一様な運動をする粒子が電場も磁場も持たないとは言えないのと同じだ. もし, 強引に漸近的な領域で質量の無い理論でも全ての相互作用が無視できるとしても, 結局はいわゆる**赤外発散** (infrared divergences) の問題に行き当たる. これは量子電磁気学では, 電荷を持つ in 状態と out 状態を電磁場を持つ状態として定義しなおせば良いので, 本質的な困難とは言えない. しかし, QCD の閉じ込めは, まさに赤外発散のおかげかも知れない. したがって, 漸近場が自由であるというのは, まったくの誤りであるかもしれない. 残念ながら, この赤外発散という非常に面白い問題はこの本の範囲外だ. 9 章ではこの問題の簡単な局面のみを幾つか扱うことにする.

これらの問題をさしおいても, (6.203) と完全に処理済みのスピノルの行列要素からわかることは, 全ての量子的なダイナミクスはハイゼンベルグ場の時間順序積の真空期待値に含まれているということだ. したがって, これらを計算することが量子場の理論の中心的な課題となる. 場の理論の経路積分表示の有用性は, この順序積を計算するときに発揮されるが, この経路積分を導く前にまだもう一つするべきことがある.

6.7 相互作用表示

場の理論を解くことは非常に困難なので, しばしば, 使える手段は摂動論しか無い. 共変的摂動論 [24,25,26] は色々な方法で導けるが, この節では, **相互作用表示** (interaction picture) [27] を使う. これは, 量子力学のときと同じで, 完全に非線形な相互作用をする場 Φ を, 解ける線形な場 ϕ を使って構成する.

系のハミルトニアンを $H = H_0 + H_I$ と二つに分ける. H_0 は解ける系を定義し, H_I はハミルトニアンの残りの部分である. 時間依存性が H_0 で決まっている場を ϕ_α とすると, $[H_0, \phi_\alpha] = -i\dot{\phi}_\alpha$ が満たされている. また, ϕ_α の共役運動量を π_α と記す. 一方, 相互作用する場 Φ_α は $[H_0, \Phi_\alpha] = -i\dot{\Phi}_\alpha$ を満たし, その共役運動量を Π_α とする.

場 Φ_α は, 場 ϕ_α から, 場と共役運動量が時間に依存するユニタリー変換で関係しているとして構成される.

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}, t) = U(t)\Phi_\alpha(\mathbf{x}, t)U^{-1}(t)\,, \quad \pi_\alpha(\mathbf{x}, t) = U(t)\Pi_\alpha(\mathbf{x}, t)U^{-1}(t)\,. \tag{6.207}$$

微分 $\partial/\partial t$ を実行すれば, すぐに次の式が得られる.

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_\alpha(x) &= \dot{U}(t)U^{-1}(t)\phi_\alpha(x) + \phi_\alpha(x)U(t)\dot{U}^{-1}(t) + U(t)\dot{\Phi}_\alpha(x)U^{-1} \\ &= [\dot{U}(t)U^{-1}(t), \phi_\alpha(x)] + i[H[\phi_\alpha], \phi_\alpha(x)]\,.\end{aligned} \tag{6.208}$$

ここで, 関係式 $\dot{U}U^{-1} = -U\dot{U}^{-1}$ と,

$$H[\phi_\alpha] = U(t)H[\Phi_\alpha]U^{-1}(t) \tag{6.209}$$

を使った. (6.209) のハミルトニアンはいまや相互作用表示であり, H_0 と可換ではないので, 時間に依存する.

$\dot{\phi}_\alpha = i[H_0, \phi_\alpha]$ を (6.208) に代入して次の式を得る.

$$\begin{aligned}[\dot{U}(t)U^{-1}(t), \phi_\alpha(x)] &= -i[H[\phi_\alpha] - H_0[\phi_\alpha], \phi_\alpha(x)] \\ &\equiv -i[H_I(t), \phi_\alpha(x)]\,.\end{aligned} \tag{6.210}$$

これから,

$$\dot{U}(t)U^{-1}(t) = -iH_I(t) \tag{6.211}$$

がわかる.

ここで, **発展演算子** (evolution operator) $E(t,t') = U(t)U^{-1}(t')$ を導入する. そうすると, 関係式 (6.211) より,

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t,t') = -iH_I(t)E(t,t') \tag{6.212}$$

が得られる. 定義より, 発展演算子は初期条件 $E(t,t) = 1$ を満たす. これを使って, 上の一次微分方程式を次のように積分することができる.

$$E(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} d\tau\, H_I(\tau)E(\tau,t_0)\ . \tag{6.213}$$

この方程式を漸化的に使って, 発展演算子を時間順序積を使って次のようにあらわせることがわかる.

$$E(t,t_0) = T\left\{\exp\left[-i\int_{t_0}^{t} d\tau\, H_I(\tau)\right]\right\}\ . \tag{6.214}$$

例題 6.42: (6.214) が (6.212) の解であることを確かめよ.

ハイゼンベルグ場の時間順序積の真空期待値は, いまや, 発展演算子と自由場を使ってあらわせる. 実際, その形は次のように書き直せる.

$$\begin{aligned}
&G_{\alpha\cdots\beta}(x_1,\ldots,x_n) = \langle 0|\,T\{\Phi_\alpha(x_1)\cdots\Phi_\beta(x_n)\}\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\,T\left\{U^{-1}(t_1)\phi_\alpha(x_1)U(t_1)\cdots U^{-1}(t_n)\phi_\beta(x_n)U(t_n)\right\}|0\rangle \\
&= \langle 0|\,U^{-1}(t_+)\,T\{\phi_\alpha(x_1)\cdots\phi_\beta(x_n)E(t_+,t_-)\}\,U(t_-)\,|0\rangle\ .
\end{aligned} \tag{6.215}$$

上で, $t_\pm$ は極限 $t \to \pm\infty$ のことである. (6.215) の最後のステップでは, 時間順序積の性質を使って, 次のような操作をした.

$$T\left\{U(t_+)U^{-1}(t)\phi_\alpha(x)U(t)U^{-1}(t_-)\right\} = T\left\{\phi(x)U(t_+)U^{-1}(t_-)\right\}\ . \tag{6.216}$$

場の漸近的な振舞いについての仮定を使うと, $U(t_\pm)$ の真空に対する作用もわかる. in 場を消滅演算子を定義するのに使い, 真空がこの消滅演算子によって消されるとすると, スピノル場の時には次式が成立する.

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{Z_2}\,\langle n|\,a_{\rm in}(\mathbf{p})\,|0\rangle = \lim_{t\to-\infty}\int d^3x\,U_s^\dagger(p,x)\,\langle n|\,\Psi(x)\,|0\rangle \\ &= \lim_{t\to-\infty}\int d^3x\,U_s^\dagger(p,x)\,\langle n|\,U^{-1}(t)\psi(x)U(t)\,|0\rangle\ . \end{aligned} \tag{6.217}$$

これは, $U(t_-)\,|0\rangle = \lambda_-\,|0\rangle$ (λ_- は定数) のときのみ成立する. そうでなければ, (6.217) の最後のステップに残っている消滅演算子は $U(t_-)$ を消さないからだ. 同様に, $\langle 0|\,U^{-1} = \lambda_+\,\langle 0|$ が成立する. したがって,

$$\langle 0|\,E(t_+,t_-)\,|0\rangle = \langle 0|\,U(t_+)U^{-1}(t_-)\,|0\rangle = \frac{1}{\lambda_+\lambda_-} \tag{6.218}$$

が成立することがわかる. この (6.218) を (6.215) に代入すると以下のようになる.

$$G_{\alpha\cdots\beta}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\langle 0|\,T\left\{\phi_\alpha(x_1)\cdots\phi_\beta(x_n)E(t_+,t_-)\right\}|0\rangle}{\langle 0|\,E(t_+,t_-)\,|0\rangle}\ . \tag{6.219}$$

(6.219) の分母にあらわれる因子は相互作用表示での真空から真空への遷移確率であり, この項があるために, 分子の展開で**非結合** (disconnected) 項が打ち消されることになる. この説明は 8 章で, (6.219) のダイアグラムによる表現を議論するときに行う. このために, $G_{\alpha\ldots\beta}(x_1,\ldots,x_n)$ は**結合グリーン関数** (connected Green's function) と呼ばれる. この関数が分数式になっているので, 分母と分子に共通のゼロでない因子を落とすことができるのだ.

原理的に, これから先はこれまでに求めた自由場の展開を使って進むのに障害はない. 発展演算子にでてくる指数は巾展開して, それで得られる時間順序積で消滅演算子を右に, 生成演算子を左に動かしていけば, グリーン関数の展開の各項の値を求めることができる. この手続きは**ファインマン則** (Feynman rule) [26] という規則にまとめられている. この規則は, 自由場の時間順序積の真空期待値を**ウィックの定理** (Wick's theorem) [28] を使って簡単化する方法に基づいている. しかし, ここではファインマン則を場の演算子表現で導

くよりは, 外場のもとでの真空から真空への遷移確率の経路積分表式を発展させて, そこで議論することにする. これは非常に簡単に実行できることが 8 章でわかる.

ここで, 相互作用する場と自由場の間のユニタリー変換は, 数学的に良く定義されていないことを注意しておこう. 無限空間では, U は自由な理論のフォック空間でその行列要素が消えるような**非固有変換** (improper transformation) であることがしめされている [29]. これは, グリーン関数の摂動表示でこれから出会う困難の兆しとなっている. 展開項の多くで, 発散があっても驚くにはあたらないのだ. これらの発散をコントロールして取り除く方法は, 一部の理論にはあり, それらの理論を**くりこみ可能** (renormalizable) だという. くりこみがあるために, 漸化式で因子 $\sqrt{Z}$ を入れてあるのである. これは 8 章で簡単に議論する.

6.8　場の理論の経路積分

この節では, 経路積分を用いて真空から真空への遷移確率を構成する. 外場項を加えることにより, 経路積分が結合されたグリーン関数の生成汎関数として働く. この方法では, 4 章と 5 章で量子力学の場合に扱ったコヒーレント状態を使い [30], 発展演算子を微小時間間隔に分けることをする. これは 2 章から 4 章までの量子力学の経路積分を構成する方法の場の理論への拡張になっている. このアプローチ [31,32,33] には経路積分の測度が各段階で明確だという利点がある. 実際, これによれば, 6.1 節で大雑把に求めた配位空間の測度ではなく, 測度の運動量空間での表現が求まる. この測度は理論のミンコフスキー空間表示で導くが, そうして得られた測度は運動量と座標空間のユークリッド測度に関係している. これはこの節の後の方で論じる.

6.8.1　スカラー場

スカラー場を最初に考えよう. 質量がゼロでは無い相互作用場が, ある非線

形方程式にしたがい, $(\Box + m^2)\Phi \neq 0$ であるとする. もし経路積分がそのような方程式の解をあらわすならば, $(\Box + m^2)\phi = 0$ の平面波解のみでなく, よりもっと色々な関数を含む集合を扱わなければならない. この集合は, p_0 と $\mathbf{p}$ の関係 $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ を緩めて, $p_0 = \omega$ を独立変数にすることで定義する. つまり, $p = (\omega, \mathbf{p})$ の4変数が独立になるわけだ. このような関数を使えば, より一般的な振舞いに対応することができる.

一般的な実関数は, これらの固有関数から4次元フーリエ変換として次のように作ることができる.

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \left[\tilde{\psi}(p)e^{-ipx} + \tilde{\psi}^*(p)e^{ipx}\right] . \tag{6.220}$$

ここで, $px = \omega t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ である. 表式 (6.220) を書き換えるために, ω 依存性を次のように抜き出そう.

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\psi}(p)e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\psi}(\mathbf{p},\omega)e^{-i\omega t} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_p}} e^{-i\epsilon_p t}\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t) . \tag{6.221}$$

ここで, ϵ_p は後で便利なように入れておいた. この定義を使って, 関数 (6.220) は,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_p}} \left[\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t)e^{-ipx} + \tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t)e^{ipx}\right] \tag{6.222}$$

と書ける. ただし, ここで $px = \epsilon_p t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ である. (6.222) の結果は自由な運動方程式の波束解 (6.66) と同じ形だが, 係数がここでは時間に依存するところが異なる.

コヒーレント状態 $|\psi(t)\rangle$ は (6.167) にある 自由場 ϕ の**自由**フォック空間の演算子 $a_{\mathbf{p}}$ と $a^\dagger_{\mathbf{p}}$ を使って次のように定義される.

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left\{\int d^3p \left[\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t)a^\dagger_{\mathbf{p}} - \tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t)a_{\mathbf{p}}\right]\right\}|0\rangle . \tag{6.223}$$

ベーカー・キャンベル・ハウスドルフ (Baker-Campbell-Hausdorff) 恒等式を使って, 次の式を得る.

$$\langle\psi(t)|\,\phi(x)\,|\psi(t)\rangle = \psi(x) , \tag{6.224}$$

$$\langle\,\varphi(t)\,|\,\psi(t)\,\rangle =$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^3p\,\left[\tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t)\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t)+\tilde{\varphi}^*_{\mathbf{p}}(t)\tilde{\varphi}_{\mathbf{p}}(t)-2\tilde{\varphi}^*_{\mathbf{p}}(t)\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t)\right]\right\}. \tag{6.225}$$

例題 6.43: (6.224) と (6.225) を確かめよ.

ここで, 粒子のスペクトラムのフォック空間表示が相互作用のせいで異なると, まったく違った結果が得られることを強調しておく.

コヒーレント状態にはある種の完全性がある. この完全性の説明は定義 (6.223) と結果 (6.225) の中にある測度 d^3p のために複雑となるので, よく系を箱の中に入れて量子化して, 離散的な固有値を扱うことが行われる. このアプローチでは, (6.223) と (6.225) の $\mathbf{p}$ の積分は固有値の添字についての和になるし, 離散的な添字についての積もよく定義されている. 計算の最後に無限体積, つまり連続極限をとって, 体積因子が再現されることになる. これは, 量子力学で作用をフーリエ和に書き直すという量子力学の経路積分のときの手法を多次元へ拡張したものになっている. 計算の最後の無限体積極限では, 測度の逆因子を次のように再現する.

$$\sum_n = \frac{L}{2\pi}\sum_n \frac{2\pi}{L} \;\to\; \frac{L}{2\pi}\int dp\,. \tag{6.226}$$

これに類似したテクニックをここでは使う. この節では積分要素 d^3p は $(2\pi)^3/V$ で $V\to\infty$ をとったものとする. $\mathbf{p}$ についての和は d^3p の重みをつけたリーマン和で置き換える. このアプローチを使えば, コヒーレント状態の完全性に必要な測度の定義が可能になる.

コヒーレント状態の完全性は次のように書かれる.

$$1=\int \mathcal{D}\psi(t)\;|\psi(t)\rangle\,\langle\psi(t)|\,. \tag{6.227}$$

ここで測度は

$$\mathcal{D}\psi(t)=\prod_{\mathbf{p}}\frac{d^3p}{2\pi i}\,d\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t)\,d\tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t) \tag{6.228}$$

で与えられるので $\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t)$ が積分変数となる. 系を箱に入れて量子化しなかったために, これらの式では連続的な値を取る $\mathbf{p}$ についての積というよく定義できない概念が登場してしまう. このため, (6.228) の形の測度は離散的な場合の連続極限として理解されなければならない.

例題6.44: (6.227) で定義される射影演算子は (6.178) のフォック空間の単位射影演算子に同等であることを, 測度の離散的な形, つまり, 積分をリーマン和に置き換えた形で連続極限をとることにより証明せよ.

経路積分を構成する最後のステップがまだ残っている. これは, 単に自由場 $\phi(x)$ とその共役運動量 $\pi(x)$ が次のような行列要素を $\delta t \sim 0$ で持っていることに注意すればよい.

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle\psi(t+\delta t)|\,\phi(x)\,|\psi(t)\rangle}{\langle\,\psi(t+\delta t)\,|\,\psi(t)\,\rangle} &= \int d^4p\,\left[\tilde{\psi}^*(p)\phi_p(\mathbf{x},t+\delta t)+\tilde{\psi}(p)\phi_p^*(\mathbf{x},t)\right] \\
&= \psi(x)+O(\delta t)\,, \qquad (6.229) \\
\frac{\langle\psi(t+\delta t)|\,\pi(x)\,|\psi(t)\rangle}{\langle\,\psi(t+\delta t)\,|\,\psi(t)\,\rangle} &= i\int d^4p\,\epsilon_p\left[\tilde{\psi}^*(p)\phi_p(\mathbf{x},t+\delta t)-\tilde{\psi}(p)\phi_p^*(\mathbf{x},t)\right] \\
&= \rho(x)+O(\delta t)\,., \qquad (6.230)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\rho(x)\equiv i\int d^4p\,\epsilon_p\left[\tilde{\psi}^*(p)\phi_p(x)-\tilde{\psi}(p)\phi_p^*(x)\right] \qquad (6.231)
$$

である.

コヒーレント状態の遷移確率の摂動表現 (6.219) は, $N-1$ 個の完全系を張る中間状態を挿入して, N 個の微小時間の遷移確率の積に書かれる. これにより,

$$
\begin{aligned}
&\langle\psi,t_+|\,E(t_+,t_-)\,|\psi,t_-\rangle = \\
&\prod_{j=0}^{N-1}\int\mathcal{D}\psi(t_j)\,\langle\psi(t_{j+1})|\,E(t_{j+1},t_j)\,|\psi(t_j)\rangle \qquad (6.232)
\end{aligned}
$$

となる. ただし, $t_N=t_+$, $t_0=t_-$ とした.

それぞれの微小時間の要素は, 例題 2.3 にあったように, 時間順序積が $t_{j+1}-t_j=\delta t\to 0$ で自明になることによって, 計算することができる. その結果,

$$
\begin{aligned}
E(t_{j+1},t_j) &= T\left\{\exp\left(-i\int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau\, H_I[\phi,\pi]\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-i\,\delta t\int d^3x\,\mathcal{H}_I\left[\phi(\mathbf{x},t_j),\pi(\mathbf{x},t_j)\right]\right\} \qquad (6.233)
\end{aligned}
$$

となる. ただし, ここでは相互作用ハミルトニアン H_I はϕ と π の一般の局所的な正規積の汎関数であるとした. (6.229), (6.230), (6.233) を使って, さらに $O(\delta t^2)$ の項を無視すると,

$$
\begin{aligned}
&\langle\psi(t_{j+1})|\,E(t_{j+1},t_j)\,|\psi(t_j)\rangle = \\
&\langle\,\psi(t_{j+1})\,|\,\psi(t_j)\,\rangle\,\exp\left(-i\,\delta t\int d^3x\,\mathcal{H}_I[\psi(\mathbf{x},t_j),\rho(\mathbf{x},t_j)]\right) \qquad (6.234)
\end{aligned}
$$

が得られる. (6.234) の残りの行列要素は次で与えられる.

$$
\begin{aligned}
\langle\,\psi(t_{j+1})\,|\,\psi(t_j)\,\rangle &= \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\int d^3p\,\Big[\tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t_j+\delta t)\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t_j+\delta t) \\
&\qquad +\tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t_j)\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t_j)-2\tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t_j+\delta t)\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t_j)\ \Big]\Big\} \\
&\approx \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\delta t\int d^3p\,\tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t_j)\,\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t_j}\,\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t_j)\right\}. \qquad (6.235)
\end{aligned}
$$

(6.235) の結果は, $\rho(x)$ と $\psi(x)$ の $\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}$ との関係, (6.222) と (6.231), さらに (6.221) のために$\partial\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t)/\partial t$ が$\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}$ であらわせることを使って書き換えることができる. これは多少面倒ではあるが難しいことはない. 結局, 次の表式に到達する.

$$
\begin{aligned}
&\langle\,\psi(t_{j+1})\,|\,\psi(t_j)\,\rangle = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\delta t\int d^3p\,\tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t_j)\,\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t_j}\,\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t_j)\right\} = \\
&\exp\left\{i\,\delta t\int d^3x\,\tfrac{1}{2}\left[\rho\dot{\psi}-\dot{\rho}\psi-\rho^2-\nabla\psi\cdot\nabla\psi-m^2\psi^2\right]\right\}\Bigg|_{t=t_j}. \qquad (6.236)
\end{aligned}
$$

例題6.45: (6.236) を確かめよ.

作用 $\mathcal{L}_0$ の二次の項が対称的な形であらわれた. (6.236) と (6.234) を (6.232) に代入して $\delta t \to 0$ の極限をとると, 次のコヒーレント状態の遷移確率を得る.

$$\langle \psi, t_+ \,|\, \psi, t_- \rangle = \int_{\psi_-}^{\psi_+} \mathcal{D}\rho\,\mathcal{D}\psi\, \exp\left\{ i \int d^4x\, \left[\tfrac{1}{2}\rho\dot{\psi} - \tfrac{1}{2}\dot{\rho}\psi - \mathcal{H}(\psi,\rho) \right] \right\} . \quad (6.237)$$

ここで, $t \to t_\pm$ の極限ではψ と ρ は漸近的に$\psi_\pm = \psi(\mathbf{x}, t_\pm)$, $\rho_\pm = \rho(\mathbf{x}, t_\pm)$ である. また, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_\mathcal{I}$ は全ハミルトニアンである. 測度は, 次で与えられる.

$$\mathcal{D}\rho\,\mathcal{D}\psi = \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N-1} \prod_{\mathbf{p}} \frac{d^3p}{2\pi i}\, d\tilde{\psi}^*_{\mathbf{p}}(t_j)\, d\tilde{\psi}_{\mathbf{p}}(t_j) \,. \quad (6.238)$$

(6.237) の結果はスカラー場の場合の一般的な場の理論の経路積分を与えている.

ψ と ρ の境界条件は非常に重要で, 時間を含む部分積分ではかならずそれを考慮しなければならない. (6.223) のコヒーレント状態の形から, 真空から真空への遷移振幅は$\psi_\pm = \rho_\pm = 0$ として得られることがわかる. この意味で, 真空の遷移確率では, ψ と ρ が $t_\pm$ で消えるために, 部分積分が表面項無しにできることがわかる. 真空の遷移振幅については次を得る.

$${}_+\langle 0 \,|\, 0 \rangle_- = \int_0^0 \mathcal{D}\rho\,\mathcal{D}\psi\, \exp\left\{ i \int d^4x\, \left[\rho\dot{\psi} - \mathcal{H}(\psi,\rho) \right] \right\} . \quad (6.239)$$

このように, 真空の遷移は最初と最後でゼロになる関数全てについての和として計算される.

(6.221) の関係は, 定義にあらわれる $d\omega\sqrt{\epsilon_p/\pi}$ の因子を除いては3.3節で論じたフーリエ級数の変数変換と同様だ. したがって, これを使って測度に最後の調整を行う. この変数変換にともなうヤコビアン J はすでに (3.50) で

与えられることがわかっている．最終的な結果は，

$$\mathcal{D}\rho\,\mathcal{D}\psi = J^2 \prod_p \frac{\epsilon_p\, d^3p\, d^2\omega}{2\pi^2 i}\, d\tilde{\psi}^*(p)\, d\tilde{\psi}(p) \tag{6.240}$$

となる．ここで，積は 4 元ベクトル p の全ての和について行う．この測度は"場" ψ と"正準運動量" ρ のモードに関する無次元の積になっている．

基本のハミルトニアンが簡単に，

$$H_0 = \int d^3x\, \mathcal{H}_0 = \int d^3x\, \left[\tfrac{1}{2}\rho^2 + \tfrac{1}{2}\nabla\psi\cdot\nabla\psi + \tfrac{1}{2}m^2\psi^2\right] \tag{6.241}$$

という形で，$\mathcal{H}_\mathcal{I}$ が ρ を含まないときには，ρ を積分してしまうことができる．これは，ラグランジアンの中の ρ を含む項に (6.220) の展開と (6.231) を適用してできる．$\tilde{\rho}$ を次のように定義する．

$$\rho(x) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, \epsilon_p \left[\psi(p)e^{ipx} - \psi^*(p)e^{-ipx}\right] =$$
$$i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, \epsilon_p \left[\psi(p) - \psi^*(-p)\right] e^{ipx} \equiv i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, \epsilon_p\, \tilde{\rho}(p) e^{ipx}\,. \tag{6.242}$$

この量は $\tilde{\rho}^*(p) = -\tilde{\rho}(-p)$ という性質を持っている．同様に $\tilde{\phi}(p) = \tilde{\psi}(p) + \tilde{\psi}^*(-p)$ と定義すると，

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, \tilde{\phi}(p) e^{ipx} \tag{6.243}$$

と書けて，$\tilde{\phi}^*(p) = \tilde{\phi}(-p)$ という性質がある．(6.242) と (6.243) を使うと，次が成立することがわかる．

$$\int d^4x\, \left(\rho\dot{\psi} - \tfrac{1}{2}\rho^2\right) = \int d^4p\, \left[\tfrac{1}{2}\epsilon_p^2\, \tilde{\rho}(p)\tilde{\rho}(-p) + \epsilon_p\,\omega\, \tilde{\rho}(p)\tilde{\phi}(-p)\right]$$
$$= \int d^4p\, \tfrac{1}{2}\epsilon_p^2 \left[\tilde{\rho}(p) - \frac{\omega}{\epsilon_p}\tilde{\phi}(p)\right] \left[\tilde{\rho}(-p) + \frac{\omega}{\epsilon_p}\tilde{\phi}(-p)\right] + \int d^4x\, \tfrac{1}{2}\dot{\psi}^2\,. \tag{6.244}$$

変数を $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\rho}$ に変換する際のヤコビアンは p のそれぞれの値について単に 1/2 だ．さらに，$\tilde{\rho}$ 変数を

$$\tilde{\pi}(p) = \tilde{\rho}(p) - \frac{\omega}{\epsilon_p}\tilde{\phi}(p) \tag{6.245}$$

と変換する. $\rho(p)$ と $\phi(p)$ の性質から,

$$-\tilde{\pi}^*(p)=\tilde{\rho}(-p)+\frac{\omega}{\epsilon_p}\tilde{\phi}(-p) \tag{6.246}$$

が成立することがわかる. p 空間を $\omega>0$ と $\omega<0$ の二つに分けて, $d\tilde{\rho}(p)$ と $d\tilde{\rho}(-p)$ を対にして考えることができる. そうすれば, 測度の積は以下のようにその一方だけについて行われるようにできる.

$$\prod_p d\tilde{\rho}(p)=\prod_{p(\omega>0)} d\tilde{\rho}(p)\,d\tilde{\rho}(-p)=\prod_{p(\omega>0)} -d\tilde{\pi}(p)\,d\tilde{\pi}^*(p)\ . \tag{6.247}$$

同じ定義を使って, (6.244) の積分は次のような和に書ける.

$$\begin{aligned}&\sum_p d^4p\,\tfrac{1}{2}\epsilon_p^2\left[\tilde{\rho}(p)-\frac{\omega}{\epsilon_p}\tilde{\phi}(p)\right]\left[\tilde{\rho}(-p)+\frac{\omega}{\epsilon_p}\tilde{\phi}(-p)\right]\\&=-\sum_{p(\omega>0)} d^4p\,\epsilon_p^2\,\tilde{\pi}^*(p)\tilde{\pi}(p)\ .\end{aligned} \tag{6.248}$$

ここで, $\tilde{\pi}^*(-p)=-\tilde{\pi}(p)$ という性質を使った. 経路積分の中の $\tilde{\pi}$ 変数は, いまや次の結果を使って積分できてしまう.

$$\begin{aligned}&\left[\prod_{p(\omega>0)} d\tilde{\pi}^*(p)\,d\tilde{\pi}(p)\right]\exp\left[-i\sum_{p(\omega>0)} d^4p\,\epsilon_p^2\,\tilde{\pi}^*(p)\tilde{\pi}(p)\right]\\&=\prod_{p(\omega>0)}\frac{2\pi}{\epsilon_p^2\,d^4p}=\prod_p\sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon_p^2\,d^4p}}\ .\end{aligned} \tag{6.249}$$

(6.249) と (6.244) から, 次のような通常使われる経路積分の形が得られる.

$$_+\langle 0\,|\,0\rangle_-=\int_0^0\bar{\mathcal{D}}\psi\,\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}(\psi)\right]\ . \tag{6.250}$$

ここで, ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(\psi)=\tfrac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\mathcal{H}_I(\psi) \tag{6.251}$$

で与えられ, 測度は

$$\bar{\mathcal{D}}\psi=\prod_p\frac{i\,d^3p\,d^2\omega}{\sqrt{(2\pi)^3\,d^4p}}\,d\tilde{\phi}(p) \tag{6.252}$$

となる. ψ と $\tilde{\phi}(p)$ の関係は (6.243) で与えられる.

体積の因子は, 汎関数を規格化し, また測度を無次元にするために必要なので, 計算の途中でまともに入れておかなければならない. しかし, 実際にはこれらの因子は時間順序積の計算にはまったく重要ではない. これは, 連結グリーン関数を計算するのが主な目的だからだ. (6.219) の定義を思い起こせば, 規格化された真空の遷移振幅のみが重要だということは明らかであろう. その結果, 連結グリーン関数を計算するときには, この量の汎関数表現の測度にある全ての規格化定数は打ち消しあって効かない. この理由で, 普通, 測度を論じるときには規格化因子については言及しない. これ以降, 規格化された遷移確率については, 規格化因子は無視する. ただし, 常に規格化された量を論じるわけではなく, 場合に応じては測度の中の因子には気を配ることにする.

6.8.2 ディラック場

２重スピノル場の経路積分の構成は前と同様にできる. ただ, スピノルの添字と反交換関係のせいで多少話が複雑になる. 反交換関係と矛盾の無いようにコヒーレント状態を構成するためには5.5 節で論じたグラスマン変数を使う必要がある. まず最初に, 汎関数空間を拡張して, その中でスピノル関数を定義することから始めよう. これは, スカラー場のときに波束解 (6.109) を係数が時間に依存する場合に拡張したのと同様に, 次のようにする.

$$\eta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\epsilon_p}} \left[\beta_{\mathbf{p}s}(t) u_s(p) e^{-ipx} + \alpha^*_{\mathbf{p}s}(t) v_s(p) e^{ipx} \right] . \qquad (6.253)$$

ここで, u_s と v_s は通常の自由２重スピノル解であり, $px = \epsilon_p t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ である. 関数 $\bar{\eta}$ も同様に定義する. スカラー場のときのように, これらの係数はフーリエ変換として書ける.

$$\beta_{\mathbf{p}s}(t) = e^{i\epsilon_p t} \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \beta_s(p) e^{-i\omega t} ,$$
$$\alpha^*_{\mathbf{p}s}(t) = e^{-i\epsilon_p t} \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \alpha^*_s(p) e^{i\omega t} . \qquad (6.254)$$

しかし, スカラー場のときと違って係数はグラスマン数であり, したがって反可換である. (6.254) の定義から次を得る.

$$\eta(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{m}{\epsilon_p}}\left[\beta_s(p)u_s(p)e^{-ipx} + \alpha_s^*(p)v_s(p)e^{ipx}\right] . \qquad (6.255)$$

ここで, $px = \omega t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ である. (6.106) と (6.108) の性質を使うと, 係数は次のように書ける.

$$\beta_{\mathbf{p}s}(t) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{\epsilon_p}}\,\eta^\dagger(x)u_s(p)e^{ipx} , \qquad (6.256)$$

$$\alpha_{\mathbf{p}s}(t) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{\epsilon_p}}\,v_s^\dagger(p)\eta(x)e^{ipx} . \qquad (6.257)$$

ここで, $px = \epsilon_p t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ である.

自由スピノル場 $\psi(x)$ のフォック空間の演算子 $b_{\mathbf{p}}^s$ と $d_{\mathbf{p}}^s$ を使って, グラスマン数のコヒーレント状態 $|\eta, t\rangle$ を (5.131) にならって次のように作る.

$$\begin{aligned} |\eta(t)\rangle \quad = \quad & \exp\left\{\int d^3p\,\left[b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\beta_{\mathbf{p}s}^*(t) + b_{\mathbf{p}}^s\beta_{\mathbf{p}s}(t)\right.\right. \\ & + \left.\left. d_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\alpha_{\mathbf{p}s}^*(t) + d_{\mathbf{p}}^s\alpha_{\mathbf{p}s}(t)\right]\right\}|0\rangle . \qquad (6.258) \end{aligned}$$

この状態はスカラー場と同様の性質を持つ. 以下の式を証明することは例題としよう.

$$\langle\eta(t)|\,\psi(x)\,|\eta(t)\rangle = \eta(x) , \qquad (6.259)$$

$$\langle\eta(t)|\,\bar{\psi}(x)\,|\eta(t)\rangle = \bar{\eta}(x) , \qquad (6.260)$$

$$\begin{aligned} \langle\,\eta'(t)\,|\,\eta(t)\,\rangle = & \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int d^3p\,\left[\beta_{\mathbf{p}s}'^*(t)\beta_{\mathbf{p}s}'(t) + \beta_{\mathbf{p}s}^*(t)\beta_{\mathbf{p}s}(t)\right.\right. \\ & - 2\beta_{\mathbf{p}s}'^*(t)\beta_{\mathbf{p}s}(t) + \alpha_{\mathbf{p}s}'^*(t)\alpha_{\mathbf{p}s}'(t) + \alpha_{\mathbf{p}s}^*(t)\alpha_{\mathbf{p}s}(t) \\ & \left.\left. - 2\alpha_{\mathbf{p}s}'^*(t)\alpha_{\mathbf{p}s}(t)\,\right]\right\} . \qquad (6.261) \end{aligned}$$

例題 6.46: (6.259) から (6.261) までの式をしめせ.

完全性の式も, (5.133) に d^3p を加えればよく,

$$\int \mathcal{D}\eta(t)\ |\eta(t)\rangle\, \langle\eta(t)| = 1 \tag{6.262}$$

である. だたしここで, 測度は

$$\mathcal{D}\eta(t) = \prod_{\mathbf{p},s} \left(d^3p\right)^2 d\alpha^*_{\mathbf{p}s}(t)\, d\alpha_{\mathbf{p}s}(t)\, d\beta^*_{\mathbf{p}s}(t)\, d\beta_{\mathbf{p}s}(t) \tag{6.263}$$

となる.

例題 6.47: (6.263) をしめせ.

スピノル理論でも, (6.229) と (6.230) に対応する表式がなりたち, 次のように書ける.

$$\frac{\langle\eta(t+\delta t)|\, \psi(x)\, |\eta(t)\rangle}{\langle\, \eta(t+\delta t)\, |\, \eta(t)\, \rangle} \quad = \quad \eta(x) + O(\delta t)\ , \tag{6.264}$$

$$\frac{\langle\eta(t+\delta t)|\, \bar{\psi}(x)\, |\eta(t)\rangle}{\langle\, \eta(t+\delta t)\, |\, \eta(t)\, \rangle} \quad = \quad \bar{\eta}(x) + O(\delta t)\ . \tag{6.265}$$

スピノル場の経路積分を導く準備がこれで整った. この導出のためには, スカラー場のときと同じ考えで, 二つのグラスマン数のコヒーレント状態間での S 行列を (6.232) のように N 個の微小時間間隔に分けて, それぞれの要素の積に書く. そうすれば, 経路積分のためには微小行列要素を計算するだけで良い. j 番目の因子は次のようになる.

$$\begin{aligned}&\langle\eta(t_j+\delta t)|\, E(t_j+\delta t, t_j)\, |\eta(t_j)\rangle = \\ &\langle\, \eta(t_j+\delta t)\, |\, \eta(t_j)\, \rangle \exp\left\{-i\,\delta t \int d^3x\, \mathcal{H}_I[\eta(\mathbf{x},t_j), \bar{\eta}(\mathbf{x},t_j)]\right\}\ .\end{aligned} \tag{6.266}$$

ここで $O(\delta t^2)$ の項は省いた. また, $\mathcal{H}_I$ は自由場 ψ と $\bar{\psi}$ の局所的な正規積の関数であるとした.

(6.261) を使って, (6.266) に残っている行列要素は次のように書けることがわかる.

$$\begin{aligned}&\langle\, \eta(t_j+\delta t)\, |\, \eta(t_j)\, \rangle = \\ &\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\delta t \int d^3p \left[\ \beta^*_{\mathbf{p}s}(t_j)\ \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t_j}\ \beta_{\mathbf{p}s}(t_j) + \alpha^*_{\mathbf{p}s}(t_j)\ \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t_j}\ \alpha_{\mathbf{p}s}(t_j)\ \right]\right\}.\end{aligned} \tag{6.267}$$

(6.253), (6.256), (6.257) の定義を使って, (6.267) は,

$$\langle\, \eta(t_j+\delta t)\,|\,\eta(t_j)\,\rangle = \exp\left\{ i\,\delta t \int d^3x \left[\ \tfrac{1}{2}\eta^\dagger i \overleftrightarrow{\partial_0}\,\eta + \bar{\eta}\,(i\gamma\cdot\nabla - m)\,\eta\ \right]\right\}\Bigg|_{t=t_j} \tag{6.268}$$

となることがわかる.

> **例題6.48**: (6.268) の結果を確かめよ. このためには, 自由スピノルが,
>
> $$u_s^b(p)u_s^{\dagger a}(p) + v_s^b(\tilde{p})v_s^{\dagger a}(\tilde{p}) = \delta_{ab} \tag{6.269}$$
>
> という (6.108) を変形した式を満たすことを示す必要がある. ただし, ここで $\tilde{p} = (\epsilon_p, -\mathbf{p})$ である.

これらの結果を微小行列要素の積に入れて, $\delta t \to 0$ の極限をとって, 2重スピノルの場合の経路積分を次のように得る.

$$_+\langle\, \eta(t_+)\,|\,\eta(t_-)\,\rangle_- = \int_{\eta_-}^{\eta_+} \mathcal{D}\eta\, \exp\left\{ i \int d^4x \left[\tfrac{1}{2}\bar{\eta} i\gamma_0 \overleftrightarrow{\partial_0}\,\eta - \mathcal{H}(\eta,\bar{\eta})\right]\right\}\ . \tag{6.270}$$

ここで, $\mathcal{H}$ は理論の全ハミルトニアンであり, 測度は

$$\mathcal{D}\eta = \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N-1} \prod_{\mathbf{p},s} \left(d^3p\right)^2 d\alpha^*_{\mathbf{p}s}(t_j)\, d\alpha_{\mathbf{p}s}(t_j)\, d\beta^*_{\mathbf{p}s}(t_j)\, d\beta_{\mathbf{p}s}(t_j) \tag{6.271}$$

である.

真空の遷移確率の計算では $\eta_\pm = 0$ であり, そのために経路積分で部分積分ができて,

$$_+\langle\, 0\,|\,0\,\rangle_- = \int_0^0 \mathcal{D}\eta\, \exp\left[i \int d^4x\, \mathcal{L}(\eta,\bar{\eta})\right] \tag{6.272}$$

となる. 測度にあらわれる変数と場の関係は (6.253) で与えられる. 前と同じように, 測度の中の時間についての積は ω についての積で置き換えることができて, $N\to\infty$ で次のようになる.

$$\mathcal{D}\eta = J^{-8} \prod_{p,s} \left(\frac{d^3p\, d^2\omega}{2\pi}\right)^2 d\alpha^*_s(p)\, d\alpha_s(p)\, d\beta^*_s(p)\, d\beta_s(p)\ . \tag{6.273}$$

ここで J は (3.50) のヤコビアンである.

6.8.3　ユークリッド測度

経路積分の解析の多くでは, まず最初にウィック回転 $t \to -it$ で定義されるユークリッド時間に移る. これには多くの理由がある. その第一はもっとも明らかな理由で, 指数関数が関数空間で古典的な軌跡から大きく離れた軌跡の寄与を押さえることだ. 2.3 節で議論した量子力学のときのように, ユークリッド空間へウィック回転すると作用の指数関数を場について足しあげるときの測度の定義がより数学的にまともに扱える. 第二はより微妙な点で, 作用にあらわれる微分演算子が 4 次元ユークリッド時空ではエルミートであるということだ. この結果, 場のモードについての固有値問題がよりよく定義されていることになる. 一旦固有値問題が解ければ, それぞれの場はこれらの固有関数についての展開であらわされて, 経路積分は因子を除いてはその展開係数についての積分と書かれる.

このユークリッド測度と前の 2 つの節で論じた測度との関連はどうなっているだろうか. この問題を考えるには, まず測度の意味について考え直してみることが必要だ. 測度は関数のある**特定の**クラスに属する関数全てについて足しあげることを意味する. その際, 配位は作用の指数を重みとして経路積分に寄与する. これまでの 2 節では, この関数のクラスはスカラーとスピノルの自由場の作用にあらわれる微分演算子の固有関数を使って定義した. これによって, 作用にあらわれる場を定義して, そのクラスの関数についての和を場のフーリエ展開の係数の積分であらわすという処方が与えられる. 固有空間の張る空間が等しいとき, その測度は同等であるとする. したがって, ユークリッドとミンコフスキーでの測度と場の展開がどのように関係しているかを明らかにするには, 上の二つの場合について, 測度によって張られる関数空間を比べる必要がある. そのような比較は, これまでに論じたような 2 次形式の作用では比較的簡単だが, 非線形な場合はほとんど必ず不可能となる.

スカラー場の場合は, ユークリッド場は演算子 $\Box + m^2$ の固有値問題の解

で場を展開する. $\Box$ をウィック回転して得られたユークリッド版は $\Box_E$ と書き, 次のように与えられる.

$$\Box_E = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \,. \tag{6.274}$$

演算子 $\Box$ は双曲線型であるが, $\Box_E$ は楕円型である. 次の解,

$$\psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \exp ipx \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \exp i(\omega t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) \tag{6.275}$$

は質量のある固有値問題,

$$(\Box_E + m^2)\psi_p(x) = \lambda_p \psi_p(x) \tag{6.276}$$

の解である. この解は, **正定値**固有値$\lambda_p = m^2 + \omega^2 + \mathbf{p}^2 \equiv m^2 + p_E^2$ を持ち, 正規直交関係,

$$\int d^4x\, \psi_k^*(x)\psi_p(x) = \delta^4(k-p) \tag{6.277}$$

を満たす. また 4 次元ユークリッド多様体上で次のように完全でもある.

$$\int d^4p\, \psi_p^*(x)\psi_p(y) = \delta^4(x-y) \,. \tag{6.278}$$

みてわかるように, この関数の集合は (6.220) でスカラー場をミンコフスキー表示で展開したときのものと, まったく同じである. したがって, これらの測度は同じ関数空間を張り, 同等である. この場合には, ミンコフスキー空間での場の変数をユークリッド領域へ接続するのは一般化されたウィック回転,

$$t \to -it \,, \;\; \omega \to i\omega \tag{6.279}$$

で行われる. ただし, ω はフーリエ変換と固有値にあらわれる振動数である. ユークリッド場 $\phi_E(x)$ はミンコフスキー場 $\phi_M(x)$ から, ウィック回転

$$\phi_E(x) = \phi_M(\mathbf{x}, -it) \tag{6.280}$$

で得られる.

例題 6.49: ユークリッドとミンコフスキーのフーリエ成分は次のように関係している事をしめせ.

$$\tilde{\phi}_E(p) = i\tilde{\phi}_M(\mathbf{p}, i\omega)\ . \tag{6.281}$$

通常のミンコフスキー時空での経路積分を計算する方法では, それをユークリッド領域に拡張して計算したものをミンコフスキー時空へ $t \to it$, $\omega \to -i\omega$ と戻す. これは 8 章で計算するが, 自由スカラー場のユークリッド測度とミンコフスキー測度が同等であるから, 真空の遷移確率をミンコフスキーとユークリッドの経路積分法で計算したものは同じ汎関数になる. もちろん, 違いはユークリッドで計算したものにはユークリッドの運動量が入っているということだ. しかし, ミンコフスキーに戻せば, 8 章で述べる正則化 (regularization) の微妙な点を除けば, ユークリッド時空の経路積分は今まで論じてきたミンコフスキーの経路積分に一致する. 一般には, 自明でない相互作用があるときにはこの同等性は破れていて, 一般的な経路積分を定義するためにはウィック回転が必要だと考えられている. 7 章で, この点をゲージ場について論じる. そこでは, ユークリッド形式をとることによって, ミンコフスキー経路積分であらわれる多くの曖昧な点を克服できることがわかるだろう.

ディラック方程式から, ユークリッド形式の固有値方程式を作ると,

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\cdot\nabla + im\right)\eta_p(x) \equiv (\gamma_E^\mu \partial_\mu^E + im)\eta_p(x) = \lambda_p \eta_p(x) \tag{6.282}$$

となる. im の項は λ_p に吸収できるので重要ではない. 解は, p の関数である 2 重スピノル $w(p)$ を使って, $\eta_p = w(p)e^{-ipx}$ となる. この形を (6.282) のディラック表現に代入すると,

$$D(p)w(p) = (\lambda_p - im)w(p) \equiv \lambda'_p w(p) \tag{6.283}$$

を得る. ただし, $D(p)$ は,

$$D(p) = \begin{pmatrix} \omega & i\mathbf{p}\cdot\sigma \\ -i\mathbf{p}\cdot\sigma & -\omega \end{pmatrix} \tag{6.284}$$

である.

> **例題6.50**: (6.283) の解は固有値 $\pm\sqrt{\omega^2+\mathbf{p}^2}=\pm p_E$ を持ち, それぞれ 2重に縮退していることをしめせ.

(6.283) の固有スピノル解は次のように構成できる. いま, $j=(1,2)$ として $\xi^{(j)}$ が2つの直交する任意の 2×1 のスピノルをあらわすとしよう. 直交性は $\xi^{(j)\dagger}\xi^{(k)}=\delta_{jk}$ とあらわせる. このとき, 固有値 $\pm p_E$ の固有スピノル $w_\pm(p)$ は次のように与えられる.

$$w_+^{(j)}(p)=\frac{1}{\sqrt{2p_E(\omega+p_E)}}\begin{pmatrix}(\omega+p_E)\xi^{(j)}\\ -i\sigma\cdot\mathbf{p}\,\xi^{(j)}\end{pmatrix}, \tag{6.285}$$

$$w_-^{(j)}(p)=\frac{1}{\sqrt{2p_E(\omega+p_E)}}\begin{pmatrix}-i\sigma\cdot\mathbf{p}\,\xi^{(j)}\\ (\omega+p_E)\xi^{(j)}\end{pmatrix}. \tag{6.286}$$

これらの規格化された解を使うと, ユークリッド場は次の展開であらわせる.

$$\eta_E(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^2}\,\alpha_E^\lambda(p)w^\lambda(p)e^{-ipx}\;. \tag{6.287}$$

ただし, ここで λ については固有値問題の4つの解全てについて和をとる.

ユークリッド場 (6.287) はミンコフスキー場の展開 (6.255) にあらわれるのと同じ関数の組で展開されている. したがって, 両者の係数は (6.281) に似た関係,

$$\alpha_E^\lambda(p)=i\sqrt{\frac{m}{\epsilon_p}}\left[\beta_s(\mathbf{p},i\omega)w^{\lambda\dagger}(p)u_s(p)+\alpha_s^*(-\mathbf{p},-i\omega)w^{\lambda\dagger}(p)v_s(-p)\right] \tag{6.288}$$

を満たす. 経路積分のユークリッド版の測度は,

$$\mathcal{D}\eta=N\prod_{p,\lambda}d\alpha_E^\lambda(p)\,d\alpha_E^{\lambda *}(p) \tag{6.289}$$

と書かれる. こうして, 前節で求めた測度とユークリッド測度は同等となる.

スピノルの作用には微妙な点があり, そのためユークリッド測度を変換する必要がある. 作用には η と $\bar\eta$ の両方があらわれる. 後に8章と9章で明ら

かになるように, $\bar{\eta}$ を $\bar{w}$ よりも $w^\dagger$ で展開するほうがよい. これは次のようにする.

$$\bar{\eta}_E(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, \alpha_E^{\lambda *}(p) w^{\lambda\dagger}(p)\gamma^0 e^{ipx} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, \beta_E^{\lambda}(p) w^{\lambda\dagger}(p) e^{ipx}\ . \tag{6.290}$$

α^* と β の関係は, 固有スピノル w の完全性を使って $\bar{w}$ を $w^\dagger$ に射影すれば次のように得られる.

$$\beta_E^{\lambda}(p) = \alpha_E^{\lambda' *}(p)\bar{w}^{\lambda'}(p) w^{\lambda}(p)\ . \tag{6.291}$$

例題 6.51: (6.291) の変換のヤコビアンを求め, それが特異でないことをしめせ.

変換された測度は次で与えられる.

$$\mathcal{D}\eta = N \prod_{p,\lambda} d\alpha_E^{\lambda}(p)\, d\beta_E^{\lambda}(p)\ . \tag{6.292}$$

ユークリッド形式を使う一つの利点は, エルミートなポテンシャルが導入できる点だ. ポテンシャルは, 次の章で論じるゲージ場などの他の場との直接, または間接的な非線形結合による. この場合では, 場と測度の自由場分解を乗り越えて, 経路積分で非摂動論的な効果を論じることができる. 測度をユークリッド形式で扱えば, ポテンシャルの時間依存性を実固有値と固有関数の完全系を持つエルミートな固有値方程式に吸収することができる. 一旦ユークリッド領域で計算できれば, 経路積分をミンコフスキー空間に戻すことができる.

スカラー場の場合はこのポテンシャルは $V(x)$ と書いて, ローレンツ変換では $V'(x') = V(x)$ である. 固有値方程式は

$$\left[\Box_E + m^2 + V(x)\right]\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x) \tag{6.293}$$

であり, ポテンシャル V の形によっては束縛状態解もある. ユークリッド測度は (6.293) を満たす固有モードについての積分である. したがって, その

ような測度はこれまでの自由場の測度とはまったく異なることもある. 特に, もし負の固有モードがあれば, そのようなモードについての積分は定義できないので, 理論は病的なものとなる. ユークリッド領域でのゼロ固有値（ゼロモードと呼ぶ）はディラック場がゲージ場と相互作用する理論でのアノマリーの原因となる. これは 9.5 節で詳細に論じる.

6.8.4 配位空間の測度

6.1 節では経路積分の測度は多体問題の連続極限から導いた配位空間表示で与えた. そのような測度は, 時空を格子状にして各格子点上の場を独立変数として扱うことで得られた. ユークリッド時間でのこの測度は経路積分をコンピューター上で数値積分するのに用いられる. この方法では粒子の質量や他の性質が非常に成功裏に導かれた. これは経路積分法と配位空間測度の方法を強く支持する証拠になっている.

配位空間の測度は経路積分で和をとる関数のクラスを直接に指定しているわけではない. しかし, 3.3 節で量子力学系の同じような状況を扱った. そこでは, 時間の格子上の変数からなる配位空間の測度はそのフーリエ級数のモードの和の測度に変換された. そのような変換は測度に複雑なヤコビアンを持ち込んだが, このヤコビアンは時間の格子間隔にはよらなかった.

このように考えて, ミンコフスキーでもユークリッドでも時空の各点上の場を独立変数として取り扱う. この測度は時空の格子化が無限小になるときにフーリエ変換ができ, フーリエ変換の係数が, 発展演算子を**自由場の状態**で構成した射影演算子で分解して得た測度 (6.240) と一致する. ここで非常に重要な事を強調しておく. この配位空間の測度はそのような経路積分の導出についてだけ, フーリエ係数による定義と形式的に同等であるということだ. 相互作用のためにモード展開が (6.240) と異なる場合に, 配位空間の測度が同じ形になる証明は無い. しかし, 測度に配位空間の形を用いることで問題が出てくるという反例も無い.

二つの測度の間を変換することも可能なはずだ. 配位空間の変数から運動

量での変数へ変換するのには, ヤコビアンがともなう. このヤコビアンは一般に複雑な形をしているであろうが, その形はいまはわかっていない. ただ, ある種の極限操作で有限になっていると考えられる. しかし, このヤコビアンは全体の因子に吸収されて, 遷移振幅の規格化で消える. もっとも, これは遷移振幅が規格化されて全体の定数因子は物理的な過程に寄与しないと**仮定**しての話だ.

実際の経路積分の応用では両方の測度が使われる. 作用は常に配位空間で書かれているから, 配位空間の測度は非常に直感的で使いやすい. 各点での場の変数は量子力学の p と q の一般化とみなせるので, 量子力学での多くの結果を場の理論へ持ってくることができる. したがって, 経路積分を配位空間で扱う際の矛盾の無いルールを論じておくことは重要だ.

基本的なアプローチは運動量空間のときと似ていて, 積分を時空の格子についてのリーマン和として書く. 作用の積分にあらわれる測度の要素, たとえば 4 次元では d^4x は小さいがゼロではないとする. 完全に一般的に議論するために, 以下ではどの次元についてもこの測度要素を dx と書くことにする. デルタ関数は, 特に断わらない限り時空と同じ次元とする. このようにして, 時空の積分は和,

$$\int dx\, f(x) \to \sum_j dx_j\, f(x_j) \tag{6.294}$$

と分解できる. ここで, x_i は時空の格子点をしめす. こうすれば, 1.4 節で 1 変数関数について論じたように関数を行列としてみることができる.

例としてスカラーの実関数 $\psi(x)$ を考えよう. よくあるガウス型経路積分は次の置き換えを使って計算することにする.

$$\int \mathcal{D}\psi \exp\left[-\int dx\, dy\, \psi(x) D(x,y) \psi(y)\right] =$$
$$\int \prod_j d\psi(x_j)\ \exp\left[-\sum_{j,k} dx_j\, dx_k\, \psi(x_j) D(x_j, x_k) \psi(x_k)\right] . \tag{6.295}$$

この形は (1.104) で馴染みのものだ. もし, $D(x,y)$ が**エルミート**な行列なら

ば, (6.295) は次のように求められる.

$$\int \prod_j d\psi(x_j)\ \exp\left[\sum_{j,k} dx_j\, dx_k\, \psi(x_j) D(x_j, x_k) \psi(x_k)\right]$$
$$= N[\det D]^{-\frac{1}{2}}\ . \tag{6.296}$$

ここで N は dx と無限ガウス積分で出る 2π のような因子の積を集めたものだ. この定数は, 通常経路積分の規格化で消されるので, 物理量の計算には効かない. 繰り返すが, これは経路積分が真空の遷移確率や, 他の規格化された量に相当している場合を**仮定**しての話だ.

(6.296) の結果は D がエルミートで正定値の固有値を持つ場合にのみ正しい. このため, 配位空間の測度はユークリッド領域でのみ定義される. なぜそうかをみるには, 微分演算子の行列式を調べる必要がある. これは連続な関数の行列式の特別な例になっている. この行列式は (1.81) と同様な意味で理解されて,

$$\det D = \exp(\mathrm{Tr} \ln D) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \mathrm{Tr}(D - \delta)^n\right] \tag{6.297}$$

である. トレース演算は積分であり, たとえば,

$$\mathrm{Tr} D(x, y) = \int dx\, D(x, x) \tag{6.298}$$

となる. 2 変数関数の巾は多重積分として,

$$D^n(x, y) = \int dz_1 \cdots dz_{n-1}\, D(x, z_1) D(z_1, z_2) \cdots D(z_{n-1}, y) \tag{6.299}$$

と定義される. D がある自己共役な線形演算子 L_x で $D(x,y) = L_x \delta(x-y)$ と書けるときは, (1.86) と同様に,

$$\det L = \prod_j \lambda^{(j)} \tag{6.300}$$

となる. ただし, ここで積は, 指数にあらわれる積分が覆う時空多様体とその上での境界条件に矛盾しない L_x の固有値 $\lambda^{(j)}$ すべてについて行われる. こ

れによって, 配位空間表示では

$$\int \mathcal{D}\psi \exp\left[-\int dx\,dy\,\psi(x)L_x\delta(x-y)\psi(y)\right] = \left[\prod_j \lambda^{(j)}\right]^{-1/2} \tag{6.301}$$

となっていて, これは L_x の固有値が実で正定値のときのみ定義されることがわかる. $\Box$ のユークリッド形が正定値の固有値を持つことを思い出せば, ユークリッドへの接続が配位空間の経路積分の測度を正しく定義するのに必要であることに納得がいくであろう. 微分演算子の固有関数と固有値と, それが定義される多様体は密接に関係しているために, 経路積分も量子論の時空のトポロジー的な性質に大きく影響されるのである.

複素場についての積分の場合は, 例外的にユークリッド化を必要としない. 実際, デルタ関数の定義を使うと次のように計算ができる.

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^*\ \exp\left\{i\int dx\,dy\,\phi^*(x)D(x,y)\phi(y)\right\} = \\
&\int \prod_j d\phi(x_j)\,d\phi^*(x_j)\ \exp\left\{i\sum_{j,k} dx_j\,dx_k\,\phi^*(x_j)D(x_j,x_k)\phi(x_k)\right\} = \\
&N_1\int \prod_j d\phi(x_j)\,\delta\left(\sum_k D(x_j,x_k)\phi(x_k)\right) = N_1N_2\,(\det D)^{-1}\ .
\end{aligned} \tag{6.302}$$

ここで N_1 と N_2 は測度の要素と π の積を寄せ集めたものである. (6.302) の結果を使えば, $G(x)=0$ の一意的な解を $\psi_c(x)$ として,

$$\det\left|\frac{\delta G(x)}{\delta\psi(y)}\right| \prod_x \delta\Big(G(x)\Big) = \prod_x \delta\Big(\psi_c(x)\Big) \tag{6.303}$$

がいえる. この形を使えば, 4.6 節の拘束条件についての結果を場の理論にも一般化できる. これは次の章で行う.

例題 6.52: (6.303) を (6.302) を使って導け.

同じような結果がグラスマン変数についてもなりたつ. これは例題にしておこう.

例題 6.53: グラスマン数の値を持つ関数 $\eta(x)$ について, 定数因子をのぞいて, 以下の式が成立することをしめせ.

$$\int \mathcal{D}\eta \, \exp\left\{ \int dx\, dy\, \eta(x) D(x,y) \eta(y) \right\} \sim (\det D)^{\frac{1}{2}} \,. \tag{6.304}$$

また, 複素グラスマン関数について,

$$\int \mathcal{D}\eta \, \mathcal{D}\eta^* \, \exp\left\{ \int dx\, dy\, \eta^*(x) D(x,y) \eta(y) \right\} \sim \det D \tag{6.305}$$

が成立することをしめせ.

この節で導いた運動量表示での 2 重スピノルの測度を連続の場合にあらわすには微妙な点がある. (6.292) の結果を (6.290) の展開とあわせると, 測度のフーリエ成分はη と $\bar{\eta}$ から導かれるのであって, $\eta^\dagger$ からでは**ない**ということがわかる. したがって, スピノル場の連続な測度は

$$\mathcal{D}\eta = \prod_x d\bar{\eta}_\alpha(x)\, d\eta_\alpha(x) \tag{6.306}$$

と書かれて, 以前と同じように 8 つの独立な成分を持っている.

交換子を, その古典的なポアッソン括弧との関係を使って, 連続測度の方法で扱うこともできる. しかし, 連続測度, つまりユークリッド時間ではポアッソン括弧はユークリッド空間の全ての積分となる. 場の理論では, 場 ϕ_α とその共役運動量 π_α の汎関数 A と B のポアッソン括弧は 4 次元時空で次のように定義される.

$$\{A,B\}_{\phi,\pi} = \int d^4x \left[\frac{\delta A}{\delta\phi_\alpha(x)} \frac{\delta B}{\delta\pi_\alpha(x)} - \frac{\delta B}{\delta\phi_\alpha(x)} \frac{\delta A}{\delta\pi_\alpha(x)} \right] . \tag{6.307}$$

同時刻交換関係は, 経路積分にあらわれる c 数の関数で演算子の時間を一致させることにより得られる. もちろん, 一般のポアッソン括弧についてはこの限りではない.

ポアッソン括弧を使うために, 対称性の生成子の形を変えなければならないということがおこる. 6.5 節のネーターの定理の議論から, 場の理論の演算

子形式での対称性の生成子は空間の体積のみについての積分であらわされ，典型的な形は

$$U(t) = \exp\left\{ i \int d^3x\, \lambda(\mathbf{x}, t) G(\mathbf{x}, t) \right\} \tag{6.308}$$

であることがわかっている．ここでλ は変換パラメータで G はネーターの定理で決定される場の演算子からなっている．ユニタリーな対称性変換をあらわす交換子は交換関係か反交換関係を使って同時刻で計算される．ポアッソン括弧の形式では生成子はユークリッド空間の全てについての積分となる．ポアッソン括弧の定義より，

$$\{A(\mathbf{x}, t), Q\} = \int d^4y\, d^4z\, \lambda(z) \left[\frac{\delta A(x)}{\delta \psi_\alpha(y)} \frac{\delta G(z)}{\delta \pi_\alpha(y)} - \frac{\delta A(x)}{\delta \pi_\alpha(y)} \frac{\delta G(z)}{\delta \psi_\alpha(y)} \right] \tag{6.309}$$

である．もし G と A が時間についての積分を含まなければ，汎関数微分の規則によってデルタ関数がでて，A と λG の時間を以下のように揃える．

$$\{A(x), Q\} = A'(x)\ . \tag{6.310}$$

ここで，$A'(x)$ は $A(x)$ の微小変換後の形である．ポアッソン括弧は汎関数形式で空間と時間を本当に同等に扱うので非常に有効である．

この節の主な目的は古典的な場の理論系を経路積分を使って量子化する際のガイドラインを得ることであった．ここでの結果は以下のようにまとめることができる．出発点は古典的な作用で，それは一般化された座標 ψ_α の汎関数になっている．作用から正準運動量 π_α が得られ，それからハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(\psi_\alpha, \pi_\alpha)$，そしてハミルトニアン $H[\psi_\alpha, \pi_\alpha]$ が得られる．もし系の方程式が $\dot{\psi}_\alpha$ を ψ_α と π_α の関数として決定しないか，系に拘束条件があれば，4.6 節の拘束条件のもとでの経路積分法を使う必要がある．この問題は次の章で論じるとして，二つの古典的な配位 ψ_- と ψ_+ の間の量子遷移振幅は次の経路積分で与えられる．

$$Z = \int_{\psi_-}^{\psi_+} \mathcal{D}\pi\, \mathcal{D}\psi\, \exp\left\{ i \int dx\, \mathcal{L}(\psi, \pi) \right\}\ . \tag{6.311}$$

ここで経路積分にあらわれる作用は

$$\mathcal{L}(\psi,\pi)=\frac{1}{2}\pi_\alpha\dot{\psi}_\alpha-\frac{1}{2}\dot{\pi}_\alpha\psi_\alpha-\mathcal{H}(\psi,\pi) \tag{6.312}$$

で与えられる．測度は中間の可能な ψ と π の関数全てについての積分と理解される．経路積分にあらわれる全ての正準な自由度に積分変数が対応する．フェルミ場や拘束条件があるときは多少微妙な点もあるが，この方式がほとんど全ての系に適用できる．

残念ながら，場の理論での経路積分法の妥当性は，量子力学のときよりも不明確だ．この節での導出は相互作用表示を導くユニタリー演算子 U によって場の理論に摂動論的な解が得られることにのみよっているともいえる．この議論によれば，理論の経路積分表示は矛盾の無い摂動論表示があるときには必ず存在することになる．しかし，ハーグ (Haag) の定理 [29] で述べられているような摂動論の負の局面を考えると，この議論では経路積分がより一般的に正当かどうか確信を持つことができない．たしかに，運動方程式の古典解の役割から非可換ゲージ理論の量子化までの現代の場の理論の色々な局面は，経路積分によりもっともコンパクトでエレガントにあらわすことができる．また一方で，コンパクトでエレガントだからといってそれが経路積分の妥当性を証明していることにもならない．実際，場の理論の問題で，経路積分でも演算子法と同じくらい不明瞭な問題もある．とくに，ほとんどの非線形相互作用をする理論でのスペクトラムの問題はどちらの流儀でも解析を拒んでいる．もし，なにかの新しい方法で経路積分が**一般的に正しい**といえるようなものがあるとしたら，それは数値的な方法で経路積分からダイナミクスを解き明かすようなものだろう．いまいえることは，経路積分が広い意味で妥当かどうかという問題はまだ未解決だということだ．

参 考 文 献

[1] A. Einstein, Ann. Physik **17**, 891 (1905).

[2] E. Schrödinger, Ann. Physik **81**, 109 (1926); W. Gordon, Z. Physik **40**, 117 (1926); O. Klein, Z. Physik **41**, 407 (1927).

[3] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **A117**, 610 (1928); Proc. Roy. Soc. (London) **A118**, 351 (1928).

[4] W. Heisenberg and W. Pauli, Z. Phyzik **56**, 1 (1929).

[5] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1980).

[6] L. D. Faddeev and A. A. Slavnov, *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts, 1980.

[7] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood, Chur, Switzerland, 1981.

[8] L. H.Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[9] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[10] P. Ramond, *Field Thoery: A Modern Primer, Second Edition*, Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989.

[11] ゴールドシュタイン著「古典力学」（吉岡書店）.

[12] H. Hammermesh, *Group Theory and Its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962

[13] B. Wybourne, *Classical Groups for Physicists*, Wiley, New York, 1974.

[14] ポアンカレ群の表現の分類は，ウイグナーによって完成された. E.P. Wigner, Ann. Math. **40**, 1(1939); Nuovo Cimento **3**, 517 (1956) を見よ.

[15] 場の理論での変分法とネーターの定理 [17] についての優れたレビューは, E.L. Hill, Rev.Mod.Phys. **23**, 253 (1951) である.

[16] W. Weyl, Z. Physik **56**, 330 (1929).

[17] E. Noether, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 171 (1918); また, [15] も見よ.

[18] 一般相対論はこの本の範囲外である. 読者には, R. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984 を薦める.

[19] V. Fock, Z. Physik **75**, 622 (1932).

[20] W. Pauli, Phys. Rev. **58**, 716 (1940).

[21] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statictics, and All That*, Benjamin, New York, 1964.

[22] S 行列は次の文献で初めて論じられた. W. Heisenberg, Z. Phyzik **120**, 513 (1943).

[23] H. Lehman, K. Symanzik, and W. Zimmermann, Nuovo Cimento **1**, 205 (1955).

[24] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys.**1**, 27 (1964).

[25] J. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948).

[26] R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949).

[27] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949).

[28] G. C. Wick, Phys. Rev. **80**, 268 (1950).

[29] R. Haag, Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, 12 (1955).

[30] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).

[31] J. R. Klauder, Ann. Phys. **11**, 123 (1960); J. R. Klauder, Phys. Rev. **D19**, 2349 (1979).

[32] ここの場の理論での経路積分の構成は A. A. Slavnov, Teoret. i Mat. Fiz. **22**, 177 (1975) と [6] の本による.

[33] 他にもコヒーレント状態を使って経路積分の構成を論じたものはある. たとえば, C. L. Hammer, J. C. Schrauner and B. DeFacio, Phys. Rev. **D18**, 373 (1978); R. E. Pugh, Phys. Rev. **D33**, 1027, 1033 (1986).

第7章　ゲージ場の理論

現代の素粒子論, 特にその標準模型の成功の鍵はゲージ場の理論にある. この章ではゲージ場の理論の可換群と非可換群の場合について, 古典的なレベルと量子論的なレベルの両方で論じる. このテーマは広大な領域を含んでおり, ここでそれをすべて網羅することは到底不可能である. ここではユニタリーな S 行列の経路積分表示を導くための道のりを辿ることにして, 他の多くの興味ある事柄は割愛する.

7.1 節では, 手始めにすべてのゲージ場のもとである電磁場の正準量子化を調べる. そこで, ゲージ不変性とゴースト場の表裏一体の関係を見る. 7.2 節では, 量子電磁気学の経路積分表示を拘束系の経路積分として導く. このテクニックは 4.6 節で論じた量子力学系でのゲージ条件を扱うための方法を場の理論に拡張したものだ. これはゲージ群の体積を抜き出すという手法の最初の例となっている. 7.3 節では, リー代数の性質を簡潔に述べる. 7.4 節では電磁場の非アーベル群への拡張であるヤン・ミルズ場を導入する. そしてミニマル結合の方法で非可換ゲージ場と物質の相互作用を作る. 7.5 節では再び拘束系の経路積分法を用いてヤン・ミルズ場の経路積分表示を導く. その結果, 特定のゲージ（固定）条件のもとで矛盾の無い量子化を実行するためのファデーエフ・ポポフの方法が得られる. この章は, 7.6 節で外微分形式でゲージ場を 1 形式 (1-form) としてしてとらえ, ゲージ場のトポロジー的性質を幾つか議論することで締めくくる.

7.1　マックスウェル場

この節ではまず古典的な電磁気学を復習した後に, それを作用汎関数の方法で取り扱う. 量子化の第一歩は可換ゲージ不変性を持つミニマル結合の理論を構成することである. ゲージ不変性とゲージ固定を古典的なレベルで述べ, 次にそれらの量子理論での役割を論じる. また, 電磁気学の明白に共変的な量子化ではフォック空間にゴーストが出現することを論じる.

7.1.1　古典的作用

古典電磁気学の最終的な形はいまから一世紀も前に確立された [1]. この理論はまず電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ で構成された. これらの場は次のマックスウェル方程式を満たす.

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\quad \nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\ ,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho,\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\ . \tag{7.1}$$

ここで ρ は電荷密度, $\mathbf{J}$ は電流密度の空間成分であり, 次の保存則を満たす.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0\ . \tag{7.2}$$

電荷を含まない 2 つの方程式は, $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ がスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ で

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{7.3}$$

と表わされるとすれば自動的に満たされる. 残りの 2 つの方程式は成分が $A^\mu=(\phi,\mathbf{A})$ で与えられる反変 4 元ベクトル A を使って共変的に書ける. (A の共変成分は $A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu=(\phi,-\mathbf{A})$ となる.) 4 元電流 J は $J^\mu=(\rho,\mathbf{J})$ と定義できて, $J_\mu=(\rho,-\mathbf{J})$ である. 電荷の保存則 (7.2) は $\partial_\mu J^\mu=0$ とあら

わすことができる. マックスウェルの方程式は,

$$\Box A_i \quad = \quad J_i + \nabla_i(\partial_\mu A^\mu) \ , \tag{7.4}$$

$$\nabla^2 A_0 \quad = \quad -J_0 - \nabla\cdot\dot{\mathbf{A}} \tag{7.5}$$

と書ける. (7.5) はガウスの法則をポテンシャルで書いたものだ. 明白に共変的な記法ではガウスの法則は,

$$\Box A_0 = J_0 + \partial_0(\partial_\mu A^\mu) \tag{7.6}$$

と書かれる. したがって, (7.4), (7.5) は次の一つの方程式にまとめられる.

$$\Box A_\mu = J_\mu + \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) \ . \tag{7.7}$$

量子化のためには (7.7) を作用原理から導かなければならない. このために反対称テンソル F を次のように導入する.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ . \tag{7.8}$$

(7.3) より, F は 3 次元の場 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ と次のように関係していることがわかる.

$$E_i = F_{0\,i} \ \ , \ \ B_i = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \ . \tag{7.9}$$

マックスウェルの方程式を再現するラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \tag{7.10}$$

で与えられる.

> **例題 7.1**: (7.10) の作用が方程式 (7.4), (7.5) を導くことを確かめよ.

次に保存される J_μ を作らなければならない. ネーターの定理によれば, 保存カレントは作用の対称性にともなっている. 電磁場の場合のこの対称性は, 場 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を A で書いたときに, それが (4.63) で与えられる A の**第 2 種ゲー**

ジ変換 (gauge transformation of the second kind) [2] のもとで不変であることによる. 相対論的記法では, ゲージ変換は,

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \tag{7.11}$$

と書ける. ここで, Λ は $[\partial_\mu, \partial_\nu]\Lambda = 0$ を満たす x の関数である. $F_{\mu\nu}$ は定義により, (7.11) のもとで不変であることが保証されている. また, $m^2 A_\mu A^\mu$ のような項が作用にあると, ゲージ不変性が失われることにも注意しておこう.

マックスウェル方程式がゲージ不変であるためには, 電流もゲージ不変でなければならない. (4.66) で荷電粒子の波動関数もゲージ変換のもとで次のように変換されなければならないということを学んだ.

$$\psi(x) \to e^{ie\Lambda(x)}\psi(x)\ . \tag{7.12}$$

場は波動関数の一般化であるから, 電磁場と電荷を持った物質場の両方を含む作用は (7.11) と (7.12) を同時に行う**ゲージ変換** (gauge transformatioon) のもとで**ゲージ不変** (gauge invariant) でなければならないことがわかる. 6.3 節のディラックの作用と (7.10) の作用からゲージ不変な作用を作ると, 次のようになる.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m - eA\!\!\!/)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ . \tag{7.13}$$

ここで, $A\!\!\!/ = \gamma^\mu A_\mu$ である.

例題 7.2: ネーターの定理を使って, (7.13) の作用のゲージ不変性にともなう保存カレントが次で与えられることをしめせ.

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\ . \tag{7.14}$$

(7.13) の作用は, 自由なディラック場の作用と, A_μ について 2 次の $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 項を含んでいる. それに加えて $A^\mu J_\mu$ の項があり, この項はディラック場と電磁ベクトルポテンシャル（電磁場ではない）の相互作用をあらわす. これはゲージ不変性という拘束条件を満たすために導入されたので, これを**ミニマル** (minimal) な結合と呼ぶ. A_μ はゲージ変換にともなうために**ゲージ場**

(gauge field) と呼ぶ. カレント J_μ は保存されるので, 結合項を時空について積分したものはそれ自身ゲージ不変である. ゲージ変換のもとで, この結合項の積分は,

$$\int d^4x\, A_\mu J^\mu \to \int d^4x\, A_\mu J^\mu - \int d^4x\, \partial_\mu(\Lambda J^\mu) \tag{7.15}$$

となり, 第 2 項はゲージ関数 Λ が無限遠で十分早くゼロに収束すればゼロとなる.

電磁場のカレント, つまり電流が何を意味するかを知るために, 6.5 節で導いた自由スピノル場の展開を J_0 に代入して計算すると次の表式を得る.

$$Q = \int d^3x\, J_0 = e \int d^3p\, \left[b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}) - d_s^\dagger(\mathbf{p})d_s(\mathbf{p})\right]\,. \tag{7.16}$$

Q に数演算子があらわれるから, フォック状態は Q の固有状態だ. b 状態は電荷 $+e$ を持ち, d 状態は電荷 $-e$ を持つ. また, 多粒子フォック状態の電荷は, 各粒子の電荷を単に足したものになっている.

以下のゲージ共変微分を導入すると便利だ.

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu\,. \tag{7.17}$$

(7.12) のゲージ変換を受ける場にこの共変微分を行ったものは,

$$\gamma^\mu D_\mu \psi \to e^{ie\Lambda}\gamma^\mu D_\mu \psi \tag{7.18}$$

となる. したがって, 単に物質場の作用で∂_μ を D_μ に置き換えれば電磁場にミニマルな結合をさせた理論ができる.

例題 7.3: (7.18) の性質を使って, (6.67) の複素スカラー場についてミニマル結合の形を求めよ. また, 保存カレントを計算せよ [3].

7.1.2 ゲージ不変性とゲージ固定

ゲージ場の運動方程式はその構成法からいってゲージ不変にできている. ま

た, $\mathbf{E}$ も $\mathbf{B}$ もそうである. マックスウェルの方程式を古典的に解くには $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ についての矛盾の無い境界条件が必要だ. しかし, 一度これらの境界条件を決定しても, A_μ についての境界条件は定まらない. これは $A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ と表わされる一群の A_μ が同じ $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ に相当するためだ.

A_μ のゲージ自由度は, A_μ の 4 自由度のうち 1 自由度は余分であり非物理的であることから生じている. 古典的なレベルではゲージ変換の自由度のために Λ を選んでこの自由度を 1 つ消すことができる. しかし, 量子力学的な自由度を除くことはそう単純ではない.

電磁場のこの性質を調べるには $J^\mu = 0$ として相互作用が無い場合を考えるのが良い. $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ はゲージ不変なやり方で**縦波** (longitudinal) 部分と**横波** (transverse) 部分に分けることができる. 電場についてはこれらを $\mathbf{E}^L$ と $\mathbf{E}^T$ と書く. 当然, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^L + \mathbf{E}^T$ が成立している. これらは $\nabla \cdot \mathbf{E}^T = 0$ と $\nabla \times \mathbf{E}^L = 0$ を満たしていて, 2 つの横波成分と 1 つの縦波成分で場ができている. これは磁場についても同じだ. 無限空間ではこれらの成分は次のような積分表示であらわされる.

$$\mathbf{E}^T(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \nabla \int d^3y\, G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}, t)\ , \tag{7.19}$$

$$\mathbf{E}^L(\mathbf{x}, t) = \nabla \int d^3y\, G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}, t)\ , \tag{7.20}$$

ここで, G は馴染みのクーロン場のグリーン関数だ.

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \exp i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\ . \tag{7.21}$$

この G は,

$$\nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{7.22}$$

を満たす. このような積分方程式はこれからしばしばあらわれるので, 簡単な表現を導入するのが便利だ. (7.22) は 1.6 節で説明した汎関数的な意味で G が演算子 ∇^2 の逆であることを示している. したがって, (7.19) のような

式は一般性を失わずに,

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{E} - \nabla\left(\frac{1}{\nabla^2}\right)\nabla\cdot\mathbf{E} \tag{7.23}$$

と書ける．このようなあらわし方では積分が陰に含まれていることを覚えておかなければならない．

こうして縦波部分と横波部分を分けておくと, $\mathbf{E}^L = \mathbf{B}^L = 0$ と選べばマックスウェル方程式の内 2 つは満たすことができるのに気付く．残りの 2 つのマックスウェル方程式は $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ の場の横波成分を互いに関係付ける．したがって 2 つの自由度が残り, これらは境界条件で指定される．後で, これが量子論で光子のヘリシティの 2 自由度に対応することがわかるだろう．

この解析から, マックスウェルの方程式をゲージ場 A_μ を使って論じるときには補助条件として他の式を導入してもう一つ自由度を取り除き, それによって, 二つの理論形式が一致するようにするのがよいとわかる．このために多くの **ゲージ条件** (gauge conditions) が考案されていて, それぞれに利点がある．（これらはまた, 単に**ゲージ**とも呼ばれる．）ローレンツゲージ条件, $\partial_\mu A^\mu = 0$ は明白に共変的であるという利点があるが, 一方, 横波成分のみが残るのが自明でないという欠点がある．輻射ゲージ, またはクーロンゲージ, $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, は共変的ではないが, 明白に縦波条件が満たされている．また, 時間的ゲージ条件 $A_0 = 0$ は非常に使いやすいという利点がある．

ゲージ条件は 4.6 節で扱った**拘束条件**である．理論を量子化して物理的部分空間を同定するのにはスカラー場とスピノル場のときよりも注意がいる．これらの条件は, 物理量が古典的にも量子的にもゲージによらないように使わなければならない．これは, あるゲージの場は適当なゲージ変換で他のゲージでの場に移り変わることができるためだ．たとえば, ローレンツゲージでの場 $A_\mu^{(L)}$ はクーロンゲージでの場 $A_\mu^{(C)}$ に次のようなゲージ関数 Λ で結びついている．

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau\, A_0^{(\mathrm{L})}(\mathbf{x}, \tau)\ . \tag{7.24}$$

実際, この関数は $\partial\Lambda = A_0^{(L)}$ を満たすので, ゲージ変換で $A_0^{(L)} \to 0$ となる．

したがって, ローレンツゲージ条件から$\partial^\mu A_\mu^{(L)} = \nabla\cdot(A^{(L)} - \nabla\Lambda) = 0$ が導かれる. これはゲージ変換後の場がクーロンゲージ条件を満たすことを意味する. つまり, (7.24) のゲージ変換はローレンツゲージでの場をクーロンゲージでの場 $A_j^{(C)} = A_j^{(L)} - \partial_j\Lambda$ に変換する.

この議論から, 第2の重要な点が浮かび上がる. それは, ゲージ条件を一旦選んでも, そのゲージ条件を満たしたままで, 更にゲージ変換ができることがあるということだ. たとえば, テンポラルゲージ条件は, $\partial_0\Lambda = 0$ を満たすゲージ変換で不変だ. また, ローレンツゲージ条件は $\Box\Lambda = 0$ を満たす変換のもとで, またクーロンゲージ条件は $\nabla^2\Lambda = 0$ を満たす変換のもとで不変だ. 無限空間では後者の方程式, $\nabla^2\Lambda = 0$ には規格化できる解が無い. この結果, クーロンゲージは無限空間ではゲージ不変性が残っていない. ゲージ不変性が残っていると, 量子論のゲージ場のセクターにゴーストやゼロノルム状態が出てくる. この議論はこの節の最後に行う.

3番目の重要な点は, 正準運動量を考えるときに出てくる. (7.10) の作用から,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} \equiv \Pi^\mu \tag{7.25}$$

となるが, これにより, $\Pi^0 = 0$ となることがわかる. このように A_0 に正準共役な運動量が存在しないために, ゲージ拘束条件を導入する必要性が生じる. これを行う一般的な方法は 4.6 節で量子力学の経路積分について議論した. 標準的な方法は A_0 に共役な運動量をつくるために**ゲージ固定** (gauge fixing) 項をラグランジアンに導入することだ. 理論を量子化するには, この運動量が弱い意味で消える部分空間 (物理的空間) に制限する. ほとんどいつも, 拘束条件 $\Pi_0 = 0$ を課すことにより, 使ったゲージ固定項が消える. このために, ラグランジアン密度がもとの形に戻る. したがって, ゲージ固定項は 4.6 節で議論した新しい正準運動量への正準変換の役割を果たす.

しかしながら, Π_0 が消えないと, 余分な問題が発生する. 量子論は標準的

な同時刻交換関係,

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\Pi^\nu(\mathbf{y},t)] = i\delta^\nu{}_\mu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{7.26}$$

にしたがうので,

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\Pi_\nu(\mathbf{y},t)] = ig_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{7.27}$$

がみたされている. (7.27) の結果は A_0 とその共役運動量との交換関係は他の 3 つの成分の反対の符号を持つことをしめしている. これは, すぐ後に見るように, フォック空間に負のノルム (ゴースト) を持つ状態を導く. 負のノルムを持つフォック空間は, **不定計量** (indefinite metric) を持つという. これは S 行列のユニタリー性とハミルトニアンの正定値性を保つ上で困難を生じる. この問題のために, 特に電磁気学を非アーベル群へ拡張した理論で, 量子条件を課す際に特に注意が必要となる.

この手続きの例をみるために, ローレンツゲージ条件を使い, 作用を次のように書き換える.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m - eA\!\!\!/)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa(\partial_\mu A^\mu)^2\ . \tag{7.28}$$

ここで, κ は任意の実数である. ローレンツ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ が満たされている場合には(7.28) の作用はもとの (7.13) の作用と一致する. しかし, 余分な項を加えたために,

$$\Pi_0 = -\kappa\partial_\mu A^\mu \tag{7.29}$$

があり, ローレンツ条件と Π_0 は一致している. ここで, Π_0 が演算子としてゼロでないので, 標準的な量子化ができる. ゲージ条件は理論に許される状態を決める拘束条件として理解され, 物理的部分空間は Π_0 の期待値がゼロである状態の集合である. 正準量子化でこの条件を満たす方法は次の節で論じる.

ラグランジアンに余分な項を加えてそれを物理的な部分空間でゼロにする方法は, ゲージ固定と呼ばれる. これは作用に余分な項を加えても元の作用

と一致するということからゲージ条件が決まることによる. たとえば, ラグランジアンに次の項を余分に付け加えることで, クーロンゲージ条件が課される.

$$\mathcal{L}_{gf} = \dot{A}_0 \nabla\cdot\mathbf{A} \ . \tag{7.30}$$

この項から, $\Pi_0 = \nabla\cdot\mathbf{A}$ となり, ゲージ条件は $\Pi_0 = \nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ となる. ゲージ固定項はローレンツ不変である必要はない. 物理的な部分空間でそれがゼロである以上, 作用のローレンツ不変性は回復されるからだ.

(7.28) のゲージ固定項のもとでは, 運動方程式 (7.7) は,

$$\Box A_\mu = J_\mu + (1-\kappa)\partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) \tag{7.31}$$

と書き変えられる. ここでは, 拘束条件 $\Pi_0 = -\kappa\partial_\mu A^\mu = 0$ は使っていない. (7.31) の発散をとり, 電流保存則を使うと,

$$\Box\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{\kappa}\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{7.32}$$

がわかる. したがって, 電流 J_μ があっても, 電流の保存則がある限り, $\partial_\mu A^\mu$ は自由なスカラー場として振舞う. このために, ある初期時刻に $\partial_\mu A^\mu$ が空間上の全ての点でゼロであると, その後常にゼロである. これにより拘束条件を簡単に使用することができるという重要な利点がある. $\kappa = 1$ と選んだものはファインマンゲージと呼ばれ, この節でこれから使っていくことにする.

7.1.3 自由ゲージ場の量子化

この節では物質場の無いゲージ理論をファインマンゲージ条件のもとで, 正準量子化する [5]. こうしておけば, 後で経路積分を使用したときに, 理論に存在する粒子との関連がわかる. 自由ゲージ場を a_μ と記す. その過程で, 自由場のクーロンゲージでの量子化も多少論じる. 相互作用を持つゲージ場 A_μ は次の節で正準形式で少し扱うが, その完全な量子化は経路積分で行う.

出発点は次のラグランジアンだ.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu a^\mu)^2 \ . \tag{7.33}$$

場 a^μ に正準共役な運動量は (7.25) であたえられ, これを π_μ と記す. その具体的な形は,

$$\pi_j = -\pi^j = -\dot{a}_j + \partial_j a_0 \ , \tag{7.34}$$

$$\pi^0 = \pi_0 = -\partial_\mu a^\mu = -\partial_j a^j - \dot{a}_0 = \partial_j a_j - \dot{a}_0 \tag{7.35}$$

である. 場とその共役運動量は次の同時刻交換関係を満たすとする.

$$[a_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{y}, t)] = i g_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \ . \tag{7.36}$$

運動量の定義を使うと, ファインマンゲージでのハミルトニアンは,

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \ [\pi^\mu \dot{a}_\mu - \mathcal{L}] \\ &= \int d^3x \ \left[-\tfrac{1}{2}\pi_0^2 + \pi_0 \partial_j a_j + \tfrac{1}{2}\pi_j \pi_j - \pi_j \partial_j a_0 + \tfrac{1}{4} F_{ij} F_{ij}\right] \end{aligned} \tag{7.37}$$

であることがわかる. ここで, H をあらわすのに, 共変成分のみを使った.

(7.37) を使うと, 第一次拘束条件 $\pi_0 = -\partial_\mu a^\mu = 0$ は, 第二次拘束条件,

$$\dot{\pi}_0 = i[H, \pi_0] = -\partial_j \pi_j = 0 \tag{7.38}$$

を導くことがわかる. この第二次拘束条件は, まさに $J_0 = 0$ のときのガウスの法則 (7.5) だ. ファインマンゲージでの第一次拘束条件と第二次拘束条件の関係は, (7.34) の定義をつかっても次のように得られる.

$$\partial_j \pi_j = \nabla^2 a_0 - \partial_j \dot{a}_j = \partial_\mu \dot{a}^\mu - \Box a_0 = -\dot{\pi}_0 \ . \tag{7.39}$$

ここで, 運動方程式 $\Box a_0 = 0$ を使った.

これらの拘束条件は共にそれらを満たす物理的な部分空間で弱く成り立つ. このため, これらの交換子は物理的部分空間で消えるので, ファインマンゲージでは, これらは第一類拘束条件だ. これは, ディラック処方を使い, ファインマンゲージでのハミルトニアンの形から,

$$\dot{a}_0 = i[H, a_0] = -\pi_0 + \partial_j a_j \tag{7.40}$$

が成立することからわかる．物理的部分空間では $\pi_0 = 0$ であり，これは $\dot{a}_0 = \partial_j a_j$ を意味する．したがって，拘束条件の交換子は，

$$[\pi_0, \nabla\cdot\pi] = [\partial_j a_j, \nabla\cdot\pi] - [\dot{a}_0, \nabla\cdot\pi] = 0 \tag{7.41}$$

となるのである．

このようなことはクーロンゲージでは起こらない．その場合，$\pi_0 = \nabla\cdot a$ であり，クーロンゲージのハミルトニアンはゲージ条件 (7.30) を使って構成される．

$$H_C = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi_j\pi_j - \pi_j\partial_j a_0 + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij}\right] . \tag{7.42}$$

ローレンツゲージのように，第二の拘束条件はガウスの法則になる．

$$\dot{\pi}_0 = i[H_C, \pi_0] = -\partial_j\pi_j . \tag{7.43}$$

しかし，今の場合は，これらの拘束条件は同時刻交換関係，

$$i[\nabla\cdot a(\mathbf{x}, t), \nabla\cdot\pi(\mathbf{y}, t)] = \nabla^2\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{7.44}$$

を持つので，第二類拘束条件となる．(7.44) の結果から，π_0 と π_j はクーロンゲージでは独立な自由度ではないことがわかる．その結果，標準的な交換子をディラック交換子に置き換えて，2つの拘束条件の独立性を確保する必要がある．これは後でみるように，場 a_j を横波にする効果がある．

自由なファインマンゲージ場 a_μ は，$\partial_\mu a^\mu$ とその微分が消える**物理的部分空間**で量子化される．このため，運動方程式，

$$\Box a_\mu(x) = 0 \tag{7.45}$$

が成立する．正準交換関係を満たすようにフォック空間演算子 $a_\mu(\mathbf{k})$ を導入すると，その代数は次のようになる．

$$[a_\mu(\mathbf{k}), a_\nu^\dagger(\mathbf{p})] = -g_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) . \tag{7.46}$$

場 a_μ は波束として，

$$a_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_\mu^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}\right] \tag{7.47}$$

と書かれる．ここで，$\omega_k = +|\mathbf{k}|$ である．$k_0 = \omega_k$ とすれば，$k^2 = \omega_k^2 - \mathbf{k}^2$ となって，a_μ に対する運動方程式が成立する．共役運動量は，この波束を使って，(7.34) の関係式から次のように決まる．

$$\begin{aligned}\pi_j(x) &= i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[\Big(\omega_k a_j(\mathbf{k}) - k_j a_0(\mathbf{k})\Big)e^{-ikx}\right.\\ &\quad \left. - \Big(\omega_k a_j^\dagger(\mathbf{k}) - k_j a_0^\dagger(\mathbf{k})\Big)e^{ikx}\right], \qquad (7.48)\\ \pi_0(x) &= i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[k^\mu a_\mu^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx} - k^\mu a_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx}\right]. \qquad (7.49)\end{aligned}$$

> **例題 7.4**: (7.46) の代数が正準交換関係 (7.36) を保証していることをしめせ．

両方の拘束条件を満たすには，**偏極ベクトル** (polarization vector) $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ を導入するのがよい．$\lambda = 1, 2$ の偏極ベクトルは k の空間部分 $\mathbf{k}$ に対して垂直で，**横** (transverse) 偏極をあらわす．また，偏極ベクトル $\epsilon_\mu^{(3)}(k)$ は $\mathbf{k}$ に平行で，**縦** (longitudinal) 偏極をあらわし，$\epsilon_\mu^{(0)}(k)$ は**時間方向** (timelike direction) を向いている．この偏極ベクトルは運動量空間で非常に便利な基底をなす．これらの定義は，以下のようになる．

$$k^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) = \begin{cases} 0 & \lambda = 1, 2 \\ \omega_k & \lambda = 0, 3\,. \end{cases} \qquad (7.50)$$

偏極ベクトルは完全で，正規直交している．

$$g^{\mu\nu}\,\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\,\varepsilon_\nu^{(\lambda')}(k) = g^{\lambda'\lambda}\,, \qquad (7.51)$$

$$g_{\lambda'\lambda}\,\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\,\varepsilon_\nu^{(\lambda')}(k) = g_{\mu\nu}\,. \qquad (7.52)$$

時間的な偏極は $\epsilon_\mu^{(0)}(k) = (1, \mathbf{0})$ とあらわせ，縦偏極は $\epsilon_\mu^{(3)}(k) = (0, \mathbf{k}/\omega_k)$ とあらわせる．

偏極ベクトルを使うと，(7.46) のフォック空間の演算子は次のように書ける．

$$a_\mu(\mathbf{k}) = \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\alpha_\lambda(\mathbf{k})\,. \qquad (7.53)$$

(7.46) の代数を満たすためには, 新しい演算子 a_λ は, 代数,

$$[\alpha_\lambda(\mathbf{k}), \alpha^\dagger_{\lambda'}(\mathbf{p})] = -g_{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \tag{7.54}$$

を満たさなければならない. この新しいフォック空間の演算子を使うと, 二つの拘束条件は物理的部分空間では,

$$\partial_j\pi_j(x) \quad = \quad -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\omega_k^3}\left[\alpha_g(\mathbf{k})e^{-ikx} + \alpha_g^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}\right] , \tag{7.55}$$

$$\pi_0(x) \quad = \quad i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\omega_k}\left[\alpha_g(\mathbf{k})e^{-ikx} - \alpha_g^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}\right] \tag{7.56}$$

となる. ただし, ここで,

$$\alpha_g(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha_0(\mathbf{k}) - \alpha_3(\mathbf{k})\right] \tag{7.57}$$

である. (7.55) と (7.56) の二つの形は明らかに (7.39) を満たす.

フォック空間は通常のように α_μ で消される真空状態 $|0\rangle$ があるとして構成する. しかし, このフォック空間は不定計量をもつ. これは α_0 演算子の交換関係からすぐにわかる. 実際, 次で定義される状態,

$$|\mathbf{k}, \lambda = 0\rangle = \alpha_0^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle \tag{7.58}$$

は,

$$\langle\, \mathbf{k}, \lambda = 0\,|\,\mathbf{p}, \lambda = 0\,\rangle = -\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \tag{7.59}$$

という性質を持つ. この負のノルムの状態があると, どんな確率解釈も危なくなる. また, 相互作用を通じて, 遷移確率にも問題が生じる. これを解決するには拘束条件を満たす部分空間のみをつかうことが必要だ.

この部分空間を決定するには, まず, (7.55) と (7.56) の二つの拘束条件を作る演算子 α_g の次の性質に着目する.

$$[\alpha_g(\mathbf{k}), \alpha_g^\dagger(\mathbf{p})] = [\alpha_0(\mathbf{k}), \alpha_0^\dagger(\mathbf{p})] + [\alpha_3(\mathbf{k}), \alpha_3^\dagger(\mathbf{p})] = 0\;. \tag{7.60}$$

したがって, 状態 $\alpha_g^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle$ は**ゼロノルム**である. この理由によって, $\alpha_g^\dagger$ によって作られる状態は**ゴースト** (ghost) 状態 と呼ばれる. ゴーストの生成演算子

と消滅演算子は可換であるし, また, 二つの拘束条件はゴースト演算子のみからなるので, 二つのローレンツゲージ拘束条件は物理的部分空間では可換だ. これは, (7.41) の結果と一致している. 同じ理由で, $\alpha_1^\dagger$ と $\alpha_2^\dagger$ を掛けて横波を励起し, ゴーストを幾つか含んだ状態は両方の拘束条件を常に満足する. このような状態の集合は直交するように二つに分類することができる. その一つは横波成分のみを含み, したがって正のノルムを持っているものであり, 他は一つ以上のゴーストを持ち, そのためにゼロノルムになっているものだ. この部分空間に制限をすると, $\partial_\mu a^\mu$ は消える. これは, 物理的状態 $|\psi\rangle_p$ を, $\partial_\mu a^\mu$ の消滅演算子の部分, $\partial_\mu a^{\mu(+)}$ を使って

$$\partial_\mu a^{\mu(+)} \, |\psi\rangle_P = 0 \tag{7.61}$$

と定義するグプタ・ブロイラー (Gupta-Bleuler) 条件 [6] と同等だ. グプタ・ブロイラー条件の成功の鍵は (7.32) にある. これは, (7.32) のおかげで, 保存する電流との相互作用がある場合にも$\partial_\mu A^\mu$ を時間に依存せずに正振動数部分と負振動数部分に分けることができるためだ. 物理的部分空間は負ノルムの状態を含まないが, ゼロノルムの状態は残っている. 相互作用がある系では, これは問題を生じる可能性があるが, これは次節で論じる.

負のノルムの状態がエネルギーにどう寄与するか明らかではないので, ハミルトニアンの正定値性を確認することは重要だ. これには (7.37) の定義に場と正準運動量の展開を代入すればよい. これは例題として残しておくが, 結果は次で与えられる.

$$H = \int d^3k \, \omega_k \left[\sum_{\lambda=1}^{2} \alpha_\lambda^\dagger(\mathbf{k})\alpha_\lambda(\mathbf{k}) - \alpha_b^\dagger(\mathbf{k})\alpha_g(\mathbf{k}) - \alpha_g^\dagger(\mathbf{k})\alpha_b(\mathbf{k}) \right] . \tag{7.62}$$

ここで,

$$\alpha_b(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha_0(\mathbf{k}) + \alpha_3(\mathbf{k}) \right] \tag{7.63}$$

である.

例題 7.5: (7.62) を確かめよ.

(7.63) の演算子も,

$$[\alpha_b^\dagger(\mathbf{k}), \alpha_b(\mathbf{p})] = 0 \tag{7.64}$$

を満たすから, ゴースト演算子だ. しかし, これらの二つのゴースト演算子は可換ではない.

$$[\alpha_b(\mathbf{k}), \alpha_g^\dagger(\mathbf{p})] = -\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \ . \tag{7.65}$$

α_b に伴うゴースト状態は物理的部分空間には許されていない. したがって, 物理的部分空間の定義と (7.60) から, (7.62) のなかの危険な負のエネルギー項は物理的部分空間でのハミルトニアンの行列要素には寄与しないことがわかる. これは, 結局のところ, 物理的状態には, 時間的偏極で負のエネルギーを持つ励起と, 縦偏極の正のエネルギーを持つ励起が同じ数だけ含まれていて, それらのエネルギーは打ち消し合い, 合計のエネルギーに効かないといえる.

クーロンゲージではディラック交換子を使って計算する必要がある. これには 4.6 節のテクニックを場の理論に拡張する必要があるが, これは 6.8 節の連続法を使えばよい. このアプローチでは, 場が時空の各点での量子力学的な量として扱われ, それに習って, 拘束条件も時空の各点で与えられる. これによって, 4.6 節の方法を少し変化させただけで使うことができる. 拘束条件についての和は積分に置き換えられ, 行列の逆も連続的な意味で解釈することにする. 各点での拘束条件は $\theta_1 = \pi_0$ と$\theta_2 = \nabla \cdot \pi$ と書く. これらの第二類拘束条件の (7.44) の交換子から, t 行列が次のように求まる.

$$t = \begin{pmatrix} 0 & -i\nabla^2\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ i\nabla^2\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \end{pmatrix} . \tag{7.66}$$

(7.23) で使った表わし方を用いると, この行列の逆は,

$$c = \left(\frac{1}{\nabla^2}\right)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{7.67}$$

と書ける. ここで, $1/\nabla^2$ はクーロン・グリーン関数 (7.21) の $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ の意味だ. 行列 c は, 連続的な意味で t の逆である, つまり,

$$(t \cdot c)_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \int d^3y \, t_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, c_{jk}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \delta_{ik}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \tag{7.68}$$

が成立する. したがって, B と C の同時刻ディラック交換子は,

$$[B,C]_D = [B,C] + i[B,\nabla\cdot\pi]\left(\frac{1}{\nabla^2}\right)[\partial_j a^j, C] - i[B,\partial_j a^j]\left(\frac{1}{\nabla^2}\right)[\nabla\cdot\pi, C] \tag{7.69}$$

となる.

(7.69) にある積分の意味を把握するために, 例を見てみよう. クーロンゲージ場の空間成分とその共役運動量の同時刻ディラック交換子は次のように計算される.

$$\begin{aligned}
&[a_j(\mathbf{x},t),\pi_k(\mathbf{y},t)]_D = [a_j(\mathbf{x},t),\pi_k(\mathbf{y},t)] \\
&+ i\int d^3z\, d^3z'\,[a_j(\mathbf{x},t),\nabla\cdot\pi(\mathbf{z},t)]G(\mathbf{z}-\mathbf{z}')[\nabla\cdot a(\mathbf{z}',t),\pi_k(\mathbf{y},t)] \\
&- i\int d^3z\, d^3z'\,[a_j(\mathbf{x},t),\nabla\cdot a(\mathbf{z},t)]G(\mathbf{z}-\mathbf{z}')[\nabla\cdot\pi(\mathbf{z}',t),\pi_k(\mathbf{y},t)] \\
&= -i\delta_{jk}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\partial_j\partial_k G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&\equiv -i\delta^{\mathrm{Tr}}_{jk}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,.
\end{aligned} \tag{7.70}$$

最後の関数 $\delta^{\mathrm{Tr}}_{jk}$ はいわゆる**横成分デルタ関数**であり, 以下の式に従うことが簡単にわかる.

$$\partial_j\,\delta^{\mathrm{Tr}}_{jk}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \delta_{ij}\partial_j\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \partial_i\nabla^2 G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0\,. \tag{7.71}$$

ディラック交換子は場の空間成分と共役運動量を実質上横偏極成分に限るという働きをしている. 量子化においては, クーロンゲージでのディラック交換子は通常の交換子になるから, ローレンツゲージで全ての縦偏極と時間方向の偏極を落としたものとなる. したがって, このクーロンゲージでのゲージ場の展開は, 次で与えられる.

$$a_j(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_j^{(\lambda)}(k)\left[\alpha_\lambda(\mathbf{k})e^{-ikx} + \alpha_\lambda^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}\right]\,. \tag{7.72}$$

この場は明白に横偏極であり, $\nabla \cdot a = 0$ を満たす. これによって, ディラック交換子が通常の交換子で置き換えられる. 共役運動量もクーロンゲージでは変更されるが, これは例題としておく.

> **例題 7.6**: クーロンゲージでの運動量 π_j の形を決めよ. また, クーロンゲージでのハミルトニアンをフォック空間の演算子を使ってあらわせ.

クーロンゲージでの最終のステップは a_0 の運動方程式が

$$\nabla^2 a_0 = 0 \tag{7.73}$$

になるということだ. これには, 自由空間での規格化可能な解は存在しない. したがって, a_0 を展開することはできず, $a_0 = 0$ である.

> **例題 7.7**: 拘束条件 $a_0 = 0$ に必要なディラック交換子を求めよ.

このように, ローレンツゲージでは状態のスペクトルは横偏極の励起とゼロノルムのゴーストからなっている. ゴースト状態はエネルギーがゼロであり, 物理的ではない. クーロンゲージでは, 横偏極励起のみがある. 以下では, 話を物理的にするために, どのゲージでも横偏極のみを物理的状態とみなす.

> **例題 7.8**: ネーターの定理を使って, 電磁場のスピンが以下で表わされることをしめせ.
>
> $$S_i = \int d^3x \, \varepsilon_{ijk} \pi_j(x) \, a_k(x) \,. \tag{7.74}$$

> **例題 7.9**: ヘリシティ, つまりスピンの運動方向への射影が保存されることをしめすために, 自由なハミルトニアンとの交換子がゼロであることを証明せよ. また, ヘリシティの固有状態が横偏極励起であって, 固有値が ± 1 であることをしめせ.

この例題がしめすように, ゲージ場が表す電磁場は質量ゼロの粒子をともなう. この粒子はよく知られているように**光子** (photon) と呼ばれる. この光子は二つのヘリシティしか持たない. 質量ゼロの理論では場に縦偏極成分は無く, 光子はヘリシティゼロの成分を持てない. これはまた, ローレンツ変換を使って, 観測者をブーストして光子の静止系に持ってゆくことができないことと関連している. もし, そのようなブーストが可能ならば, $\mathbf{p}$ はゼロになり, スピンの $\mathbf{p}$ 方向への射影は不定となるからだ. このように, 古典論と同じで, 光子には 2 つの自由度しか無く, ゲージ条件と付加的な拘束条件から, この 2 つの自由度が光子の 2 つのヘリシティとして表現されることがわかった. ここで, **質量を持つ**ゲージ場では上の議論は崩れることに注意しておこう. その場合は, 質量を持つ粒子の静止系にブーストを行うことが可能で, 縦偏極成分が存在する. 質量を持つゲージ場が矛盾の無い**相互作用をする**理論を構成するのは簡単なことではない. それは 9 章で論じる.

ファインマンゲージでの正準量子化で, なぜゴーストが現れるのか不思議に思うかもしれない. その答えは, 理論に残っているゲージ不変性にある. ゲージ条件 $\partial_\mu a^\mu = 0$ と作用は $\Box\Lambda = 0$ を満たすゲージ変換で不変だ. ゲージ変換の生成演算子についてネーターの定理を使うと, この残留ゲージ不変性に伴うチャージは一般的に次で与えられることがわかる.

$$Q_\Lambda = \int d^3x \, \left[\partial_j \Lambda \, \pi_j + \dot{\Lambda} \, \pi_0\right] \, . \tag{7.75}$$

これを部分積分すると,

$$Q_\Lambda = \int d^3x \, \left[\dot{\Lambda} \, \pi_0 - \Lambda \, \nabla \cdot \pi\right] \tag{7.76}$$

となる. この式には, 理論にある拘束条件 $\pi_0 = 0$ とガウスの法則 $\nabla \cdot \pi = 0$ が Λ の係数としてあらわれた. これはファインマンゲージで求めたが, (7.76) の形は残留ゲージ不変性のある**どの**ゲージでも正しい. 物理的部分空間では π_0 もガウスの法則 $\nabla \cdot \pi$ も消えなければならない. ファインマンゲージでの

正準運動量の形を使うと, Q_Λ は次のようになる.

$$Q_\Lambda = \int d^3x \left[\Lambda\,\partial_\mu \dot{a}^\mu - \dot{\Lambda}\,\partial_\mu a^\mu\right] . \tag{7.77}$$

この結果は $\dot{Q}_\Lambda = 0$ を満足する.

Q_Λ はゲージ変換を生成し, 物理的に意味のある場のあらゆる行列要素はゲージ不変でなければならないから, Q_Λ とそのベキの行列要素は消えなければならない. そうでなければ, 理論はゲージ不変で無くなる. もし, Q_Λ を作る局所演算子が生成・消滅演算子でフーリエ展開され, Q_Λ のベキが物理的部分空間で消えるならば, これらの生成・消滅演算子は可換でなければならない. これは, Q_Λ を作る局所演算子はゴーストであることを意味する.

ゲージ理論では, ゲージ固定や副次的な拘束条件を課す前に得られたもとのガウスの法則がゲージ変換の生成演算子としてあらわれることが特徴だ. このガウスの法則を使って物理的部分空間を決めるのは, 各ゲージ条件が持つ残留ゲージ不変性と密接に関係している. フォック空間で残留ゲージ不変性を扱うと, そのゲージ変換の生成演算子がゴーストのみでできていることがわかる. したがって, 残留ゲージ不変性があるときには, ゲージ条件がゼロノルムの励起をもたらすことになる. この概念を発展させたのが, BRST 不変性 [7] であり, それによってゲージ理論のユニタリー性を確保することができる. これは 8.2 節で簡単に述べる. しかし, ゲージ理論の経路積分表示はゲージ理論のほとんど全ての局面を非常に効率良くあらわすことができるので, BRST によるアプローチはあまり細かく調べないことにする.

7.2 経路積分としての QED

この節では相互作用する電磁場の理論 [8], いわゆる量子電磁気学 (QED) を経路積分で扱う. 前節から明らかなように, ゲージ理論の正準量子化は込み入ったものだ. 実際, QED の正準形式でのある種のゲージ条件の取扱いにはまだ多少の議論が続いている [4]. 更に困難の元となるのは, 次章で述べる

QED の摂動論では, **明らかに**ゲージに依存するファインマン則が得られることだ. これは, QED が非常に柔軟な理論であり, ゲージ条件を無視しても**物理的な**遷移確率には害が及ばないことによる. この免疫性は, 究極的には, 可換ゲージ理論は保存カレントと相互作用し, 全ての遷移要素が電荷を保存することによる. このゲージ条件についての非依存性を以下で見ることにする.

相互作用する理論のスペクトラムは, ゲージ理論に物理的に許される状態と, ゲージ場と相互作用する荷電スピノルか荷電スカラーの状態のテンソル積であると思える. 正準形式では, 6.7 節でしたように, 発展演算子の相互作用表示を導くのが次2のステップとなる. この発展演算子は系の時間発展への相互作用の影響をあらわす. このようなやりかたでは, 前節で議論した明白にローレンツ共変的な方法に現れる物理的部分空間のゴースト状態がまず問題となる. これらの状態は以下のようにユニタリーティにとって脅威となる. 状態の中にあるゴーストの内積は以下のように書ける.

$$0 = {}_{\rm in}\langle G \,|\, G \rangle_{\rm in} = \sum_n |{}_{\rm in}\langle G \,|\, n \rangle_{\rm out}|^2 = \sum_n |{}_{\rm in} \langle G|\, S \,|n\rangle_{\rm in}|^2 \,. \qquad (7.78)$$

ここで, 和は可能な物理的状態についてとる. もし, S 演算子がゴースト演算子と可換でないか, 交換子が物理的部分空間で消えなければ, (7.78) の右辺は消えずに左辺と矛盾が起きる. もし, 右辺が消えない場合にこのような矛盾を避けようとするなら, in 状態の完全性から, 次の式を満たさざるを得ない.

$${}_{\rm in}\langle G \,|\, G \rangle_{\rm in} \neq {}_{\rm in} \langle G|\, SS^\dagger \,|G\rangle_{\rm in} \,. \qquad (7.79)$$

つまり, ゼロノルム状態は S とゴースト演算子の交換子が物理的部分空間で消えない限り, S行列のユニタリーティを脅かすことがわかる.

S は, (6.214) で定義された発展演算子で与えられて, 相互作用する作用の 3 次以上の項を含み, 次のようになる.

$$S = T\left\{\exp\left[-i\int d^4x\, j_\mu(x)\, a^\mu(x)\right]\right\} \,. \qquad (7.80)$$

ここで j^μ は荷電場にともなう電流であり, 2 重スピノルの場合はディラック場で書くと (7.14) で与えられる. ユニタリーティの証明には, ゴーストと S

行列の交換子が物理的部分空間の in 状態と out 状態に挟まれたときに次を満たすことを証明すればよい.

$$\left[\partial_\nu a^\nu(x), \int d^4y\, j_\mu(y) a^\mu(y)\right] = 0\,. \tag{7.81}$$

> **例題 7.10**: ローレンツゲージ条件を使って, $\partial_\mu j^\mu = 0$ で in 状態 と out 状態で電荷が同じときには, (7.81) が消えることを証明せよ.

したがって, 電荷の保存のためにユニタリーティをやぶらずに通常の S行列が使えることがわかる. それが常にそうだとは限らない. 特に, ヤン・ミルズ場のときはそうだ. この場合でも正準演算子形式で明白な共変形式で拘束条件を矛盾なく扱うことができるが, それはここでは述べないことにする.

QED の経路積分法を構成するには, 6.8 節の発展演算子の中間にコヒーレント状態の完全系を挟む方法を使えばよい. これは, まず, 相互作用する理論で発展演算子を選んだゲージ条件に矛盾無く構成しなければならないので, 大変だ. そのような構成は文献 [9] にある. しかし, 前節で論じたゲージ理論の一般的な性質から, そのようにして導いた経路積分は (4.6) 節で述べた形の拘束条件のもとでの経路積分になるといえる [10,11]. 拘束条件は, 配位空間で書き下すのが一番便利なので, 配位空間での測度を使うことにする. QED の経路積分は 6.8.4 節の配位空間での測度と, 4.6 節の量子力学的な意味でのゲージ条件の取扱いを組み合わせることで導かれる. この結果, 真空の遷移確率は, 次になる.

$$
\begin{aligned}
&{}_+\langle 0|0\rangle_- = \\
&\int_0^0 \mathcal{D}\pi\, \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\eta\, \delta(\chi)\, \delta(G)\, \det\{\chi, G\}\, \exp\left\{i\int dx\, \mathcal{L}_\chi(\eta, A, \pi)\right\}\,.
\end{aligned} \tag{7.82}
$$

この形は簡単に説明できる. 測度としては, 配位空間の拘束条件の扱いが便利なように, 6.8.4 節で述べた配位空間での測度をとっている. π と A の測度はともに 4 つのモードを全て含み, スピノルの測度は 6.8.4 節の配位空間のものだ. ゲージ条件 $\pi_0 = 0$ は時空の全ての点で成立するので, 4.6 節の拘

束条件の測度を場の理論の場合に拡張しなければならない. 4.6 節では正準変換かゲージ固定条件を使って, π_0 を χ に再定義し, 変換されたラグランジアン $\mathcal{L}_\chi$ にはχ があらわれるようにできると述べた. ゲージ固定条件を加える方法は, 前節でローレンツゲージについて詳しく説明した. π_0 の正準変換の例はテンポラルゲージで, その場合は正準変換は次の全微分をラグランジアンに付け加えることで作られる.

$$\frac{1}{2}\kappa\frac{\partial}{\partial t}(A_0^2) = \kappa A_0 \dot{A}_0 \; . \tag{7.83}$$

これによって, $\pi_0 = \kappa A_0 = 0$, つまりテンポラルゲージ条件が得られる.

この結果, ラグランジアン $\mathcal{L}_\chi$ は 6.8.4 節の処方で作られたスピノルとゲージ場の和となる. これは真空の遷移確率を導くという目的に合致するもので, 次の形をしている.

$$\mathcal{L}_\chi = \mathcal{L}_f(\bar{\eta}, \eta) + \pi^\mu \dot{A}_\mu - J^\mu A_\mu - \mathcal{H}_\chi(\pi, A) \; . \tag{7.84}$$

ここで, $\mathcal{L}_f$ は 6.8.2 節で調べた自由なスピノルのラグランジアンで,

$$\mathcal{L}_f = \bar{\eta}(i\partial\!\!\!/ - m)\eta \tag{7.85}$$

となる. また, $\mathcal{H}_\chi$ は自由なゲージ場のハミルトニアン密度である. これは, 正準変換か, ゲージ固定をした古典的な作用から, 導かれているので, ゲージ条件 χ に依存する.

第一次拘束条件 $\chi = 0$ から第二次拘束条件 $G = \dot{\chi} = 0$ が導かれる. 4.6 節からこの拘束条件 G は次で与えられる.

$$G = \dot{\chi} = -\frac{\delta H_\chi}{\delta A_0} \; . \tag{7.86}$$

このように G は $\chi = 0$ に伴うゲージ条件でのガウスの法則をあらわす. π_0 かその正準変換 χ と G が時空の各点で消えるために, ゲージ条件 χ と第二の拘束条件 G のデルタ関数を時空の積として定義する. これが積分の変数に対する拘束条件を連続的にあらわす方法だからだ. また, χ と G のポアッソン括弧の行列式は (6.307) のように連続的な場合に拡張する.

4.6 節の解析で, 積分にある余分な因子, デルタ関数と行列式が次のように出てくることを思い出しておこう. 最初にあるゲージ条件は $\pi_0 = 0$ であり, これはゲージ固定も正準変換をする前からある. これによって, 第二の拘束条件としてガウスの法則 $G = \dot{\pi}_0 = 0$ が導かれる. これを π_0 に共役な変数である A_0 について解くとそれが付加的な拘束条件となる. この第二の拘束条件の解を A_0^c とすると, 拘束条件による測度因子は次で与えられる.

$$\delta(\pi_0)\,\delta(G)\,\det\frac{\delta G}{\delta A_0} = \delta(\pi_0)\delta(A_0 - A_0^c)\,. \tag{7.87}$$

また, 経路積分にあらわれる作用には作用からゲージ固定条件無しに導いたハミルトニアン $\mathcal{H}$ を含む. もし, ゲージ固定条件や正準変換を使うと $\pi_0 \to \chi$ であり, 行列式は,

$$\det\frac{\delta G}{\delta A_0} = \det\{\pi_0, G\} \;\to\; \det\{\chi, G\} \tag{7.88}$$

となる [10]. これによって, どちらの方法でも経路積分が (7.82) で与えられることがわかる.

もし, 第二の拘束条件 G の解 A_0 が**一意的に**決まらないときには, 微妙で重要な問題が起きる. このような場合には (7.82) でどの解を拘束条件と使うかが決まらず, 不定性が生じる. この点はヤン・ミルズ場を量子化するときにまた論じる.

6.8.4 節で, 相互作用する場の理論では, 積分と行列式を定義するために配位空間での測度にウィック回転を施さなければならないことを述べた. ゲージ理論では単に x^μ の他にもベクトルがあり, ユークリッド空間へのウィック回転は以下の処方で行う.

$$t \to -it\,,\;\; A_0 \to iA_0\,,\;\; \pi_0 \to i\pi_0\,,\;\; J_0 \to iJ_0\,. \tag{7.89}$$

(7.89) の処方によって, ユークリッド空間での正準交換関係が

$$[A_\mu, \pi_\nu] = -i\delta_{\mu\nu} \tag{7.90}$$

となる. (7.82) にあらわれるポアッソン括弧の行列式はユークリッド形式でのみ理解できる. この章では全ての積分と行列式の評価はまずウィック回転して行い, 計算したあとでその結果をミンコフスキー空間に戻して最終的な結果を得ることにする.

QED, また他の理論でもファインマン則を導くには, 経路積分で運動量積分をする. 残りのステップは次の章で実行する. この積分は$\chi = -\partial_\mu A^\mu$ のファインマンゲージで (7.87) の適切な測度因子も考慮して行う. ファインマンゲージでのハミルトニアンは配位空間で,

$$H = H_f + H_\chi + H_I \tag{7.91}$$

で与えられる. ここで, H_f は物質場のハミルトニアンで, A_μ を含まない. また,

$$H_I = \int d^3x \, J^\mu A_\mu \ , \tag{7.92}$$

$$H_\chi = \int d^3x \left[-\tfrac{1}{2}\pi_0^2 + \pi_0 \partial_j A_j + \tfrac{1}{2}\pi_j \pi_j - \pi_j \partial_j A_0 + \tfrac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \right] \tag{7.93}$$

である.

第二の拘束条件は, 次の形をしている.

$$G = \dot{\pi}_0 = -\frac{\delta H}{\delta A_0} = -\partial_j \pi_j - J_0 = 0 \ . \tag{7.94}$$

関係式, $\pi_j = \dot{A}^j + \partial_j A_0$ を使うと, 第二の拘束条件は元の電荷を含むガウスの法則に等しいことがすぐにわかる.

$$G = \partial_j \dot{A}_j - \nabla^2 A_0 - J_0 = 0 \ . \tag{7.95}$$

これは一意的に逆を取ることができて,

$$A_0^c = \left(\frac{1}{\nabla^2} \right) \left(\partial_j \dot{A}_j - J_0 \right) \tag{7.96}$$

となる. これにより, (7.87) の置き換えが QED では正しいことがわかる.

ファインマンゲージでは測度にあらわれる行列式を計算することが必要になる. これには (7.95) を使って G が次のように書かれることを利用する.

$$G = -\partial_j \pi_j - J_0 = -\partial_\mu \dot{A}^\mu + \Box A_0 - J_0 = \Box A_0 - J_0 \,. \tag{7.97}$$

したがって, ユークリッド空間では測度に現れる行列式は次で与えられる.

$$\Delta_\chi \equiv \det \left[\frac{\delta G(x)}{\delta A_0(y)} \right] = \det \Box_E \,. \tag{7.98}$$

ウィック回転の必要性がこれより明白になる. もし, $\Box$ がユークリッド空間に解析接続されていなければこれには多くのゼロモードが存在して, 行列式はゼロになる. ユークリッド空間に解析接続すると, 経路積分の拘束条件のもとでの測度が定義できる. 一旦定義されれば, QED では行列式はどの場も含んでいないから, 規格化によって消えるので, それ以降全く無視してもよい.

同じ行列式をポアッソン括弧から得ることも可能だ. 以下でユークリッド空間でこの計算を実行してみよう. 行列式の定義は,

$$\Delta_\chi = \det\{\chi, G\} = \det \int d^4x \left[\frac{\delta\chi}{\delta A_\mu} \frac{\delta G}{\delta \pi^\mu} - \frac{\delta G}{\delta A_\mu} \frac{\delta \chi}{\delta \pi^\mu} \right] \tag{7.99}$$

である. $\chi = -\partial^\mu A_\mu$ を使うと,

$$\frac{\delta\chi(y)}{\delta A_\mu(x)} = -\partial_y^\mu \delta^4(y-x) \tag{7.100}$$

となり, また $G = \partial_k \pi^k - J_0$ から,

$$\frac{\delta G(z)}{\delta \pi^j(x)} = \partial_j \delta^4(z-x) \tag{7.101}$$

となる. G の π_0 依存性を抜き出すには, $\partial_\mu A^\mu = 0$ とする前に G の中の π_j 依存性をみて (7.97) の形を得ればよい.

$$G = -\partial_\mu \dot{A}^\mu + \Box A_0 - J_0 = \dot{\pi}_0 + \Box A_0 - J_0 \,. \tag{7.102}$$

もしくは, 定義により, 第二の拘束条件は物理的部分空間で $G = \dot{\pi}_0$ とすることにより得られることを思い出せばよい. その結果, 次を得る.

$$\frac{\delta G(z)}{\delta \pi_0(x)} = \partial_0 \delta^4(z-x) \,. \tag{7.103}$$

この結果を (7.99) に代入すれば以前に得られた結果,

$$\Delta_\chi = \det \Box_E \tag{7.104}$$

が再現される.

ユークリッド空間では, π_0 積分は標準的なガウス型になっている. π_0 のみを含んだ項をとりあげて, (7.89) の処方を使うと, 規格化定数を除いて, 以下になる.

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\pi_0 \exp\left\{i\int d^4x \left[\tfrac{1}{2}{\pi_0}^2 + (\dot{A}_0 - \partial_j A_j)\pi_0\right]\right\} \xrightarrow{E} \\
&\int \mathcal{D}\pi_0 \exp\left\{-\int d^4x \left[\tfrac{1}{2}{\pi_0}^2 + i(\dot{A}_0 + \partial_j A_j)\pi_0\right]\right\} = \\
&\exp\left\{-\int d^4x\, \tfrac{1}{2}(\dot{A}_0 + \partial_j A_j)^2\right\} \xrightarrow{M} \\
&\exp\left\{-i\int d^4x\, \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\right\} .
\end{aligned} \tag{7.105}$$

ここで, $\xrightarrow{E,M}$ はユークリッドとミンコフスキー空間への解析接続を意味する. この結果は π_0 積分がもとの古典的な作用にあるゲージ固定項を再現することを示している.

経路積分は, 以上の解析から, 以下で与えらえることがわかった.

$$\begin{aligned}
{}_+\langle 0 | 0 \rangle_- \;=\; & \int_0^0 \mathcal{D}\pi\, \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\eta\, \Delta_\chi\, \delta(\partial_\mu A^\mu)\, \delta(G) \exp\left\{i\int d^4x \left[\mathcal{L}(\eta)\right.\right. \\
& - \tfrac{1}{2}\pi_j\pi_j - \pi_j\dot{A}_j + \pi_j\partial_j A_0 - \tfrac{1}{4}F_{jk}F^{jk} \\
& \left.\left. - J_\mu A^\mu - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\right]\right\} .
\end{aligned} \tag{7.106}$$

ここで, π は π_0 の測度が無いことを意味する.

第二拘束条件 $\delta(G)$ は作用に吸収して測度から消すことができる. そのためにはまず, デルタ関数の積を次のデルタ関数の積分表現の積に書き換えることだ.

$$\prod_x \delta\Big(G(x)\Big) = \int \mathcal{D}\Lambda \exp\left\{i\int d^4x\, \Lambda(x) G(x)\right\} . \tag{7.107}$$

G の定義を使って, (7.107) を次のように書き換える.

$$\int \mathcal{D}\Lambda \exp\left\{i\int d^4x\,\Lambda(x)G(x)\right\}$$
$$= \int \mathcal{D}\Lambda \exp\left\{i\int d^4x\ (\pi_j\partial_j\Lambda - J_0\Lambda)\right\}\ . \tag{7.108}$$

拘束条件を指数関数に書き換えたので, (7.108) に現れる時空の積分を (7.106) の経路積分の中の作用に加えることができる. また, $\mathcal{D}\Lambda$ は経路積分の測度に加わる. (7.108) の時空積分の変数は (7.106) の経路積分の中の作用で Λ が現れる 2 つの項で Λ を A_0 を置き換えたものに正確に一致している. したがって, 変数を $A_0 \to A_0 - \Lambda$ と変換すれば, (7.108) の指数にでる両方の項が消え, 経路積分の測度には何の変化も無い. しかし, この変数変換では,

$$\partial_\mu A^\mu \to \partial_\mu A^\mu - \dot{\Lambda} \tag{7.109}$$

であるために, ゲージ固定項とゲージ条件が影響を受ける. π_j 積分もまたガウス型であり, これらをすべて求めた結果,

$$\begin{aligned} {}_+\langle 0|0\rangle_- \;=\; & \int_0^0 \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}\Lambda\,\Delta_\chi\,\delta(\partial_\mu A^\mu - \dot{\Lambda})\ \exp\left\{i\int d^4x\,\Big[\mathcal{L}(\eta)\right. \\ & \left. -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu - \dot{\Lambda})^2\Big]\right\} \end{aligned} \tag{7.110}$$

となる.

例題 7.11: (7.110) を確かめよ.

(7.110) の作用の変更されたゲージ固定項とゲージ条件以外の部分と測度はゲージ不変だ. このゲージ不変性のために, 作用とゲージ条件から Λ を除くことができる. 変数は,

$$\Box\lambda = -\dot{\Lambda} \tag{7.111}$$

を満たす λ を使ったゲージ変換 $\eta \to \exp(ie\lambda)\eta$, $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\lambda$ を受ける. この結果, 経路積分は,

$${}_+\langle 0|0\rangle_- \;=\; \int \mathcal{D}\Lambda \int_0^0 \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\eta\,\Delta_\chi\,\delta(\partial_\mu A^\mu)\ \exp\left\{i\int d^4x\,\Big[\mathcal{L}(\eta)\right.$$

$$-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\Big]\Big\} \tag{7.112}$$

となる. この (7.112) の結果は (7.13) の相互作用を含む作用についてゲージ固定項とゲージ条件が時空のすべての点でのデルタ関数の形で測度に入っている経路積分を与える.

しかし, ここで新しい因子が二つ登場した. 最初の因子は, 全体にかかる $\int \mathcal{D}\Lambda$ だ. この因子の意味は, その出所をみれば理解できる. これは, 第二の拘束条件であるガウスの法則のデルタ関数を指数化することによる. ガウスの法則は物理的部分空間でのゲージ変換を生成するから, この拘束条件は可能な全てのゲージ等価な配位を積分することに相当する. このように, $\int \mathcal{D}\Lambda$ は理論の"ゲージ体積"だ. 実際, 拘束条件を課すことにより, このゲージ体積が経路積分から因子として取り出されたわけだが, これば当初奇妙に見えるかもしれない. しかし, 古典的な電磁気学がゲージ不変性のために不定であったことを思い出すと, この因子がまさに, 量子化した理論を**一意的に**決定するのに必要にであることに納得がいくだろう. ゲージ体積が因子として取り出されれば, (7.112) の測度はゲージ不変な配位についてのみの和になるわけだ.

第二の因子, Δ_χ の理解はそれほど簡単ではない. しかし, この項はユニタリーティのために必要だ. これは $\dot{\pi}_0 = 0$ を保証するデルタ関数で逆を取るときに出てくる. この第二の拘束条件は経路積分があらわす S行列からゴーストを取り除くために必要となる. QED ではこの項は取扱いにくい形をしてはいないが, 2 つのグラスマン数の場, $\bar{c}(x)$ と $c(x)$ を導入するとよりわかりやすい形に書ける. 6.8.4 節の結果と使うと, この行列式はユークリッド空間でこれらのグラスマン場の汎関数積分として次のように書き換えられることがわかる.

$$\begin{aligned}\Delta_\chi = \det \Box_E &= \int \mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c \,\exp\left\{\int d^4x\,\bar{c}\,\Box_E\, c\right\} \\ &\stackrel{M}{\to} \int \mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c\,\exp\left\{-i\int d^4x\,\partial_\mu\bar{c}\,\partial^\mu c\right\} . \end{aligned} \tag{7.113}$$

(7.113) の指数に現れる項,

$$\mathcal{L}_c = -\partial_\mu \bar{c}\, \partial^\mu c \tag{7.114}$$

は新たに作用に加わると考えることができる. また, $\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c$ は汎関数積分の測度である. (7.114) は反可換スカラー場のミンコフスキー空間での量子場の理論を定義する. この場は, 正準量子化を使って理解することができる. もし, (7.114) の作用が実数なら, $\mathcal{L}_c^*$ は $\mathcal{L}_c$ に等しい. 5.1 節で導いたグラスマン変数の性質から, 複素共役のもとで (7.114) の作用が以下のように振舞うことがわかる.

$$\mathcal{L}_c^* = -\partial^\mu c^*\, \partial_\mu \bar{c}^* = \partial_\mu \bar{c}^*\, \partial^\mu c^* \ . \tag{7.115}$$

作用が実であるためにはグラスマン数の内の一つが純虚で, もう一つは実でなければならない. このために, グラスマン数 $\bar{c}$ が $\bar{c}^* = -\bar{c}$ を満たし, また, $c^* = c$ であるとする. 作用から, これらの場は共に運動方程式,

$$\Box\, c = \Box\, \bar{c} = 0 \tag{7.116}$$

を満たすことがわかる. したがって, これらの場のモード分解は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[c(\mathbf{k})e^{-ikx} + c^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}\right] \ , \\ \bar{c}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[\bar{c}(\mathbf{k})e^{-ikx} - \bar{c}^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}\right] \ . \end{aligned} \tag{7.117}$$

$c(x)$ と $\bar{c}(x)$ の形とそのフーリエ成分の量子化条件は以下の 3 つで決まっている. 第一に $c(x)$ は実のグラスマン変数であり, $\bar{c}(x)$ は純虚だ. 第二に, $\partial_0 c$ は $\bar{c}$ に共役な運動量であり, $-\partial_0 \bar{c}$ が c に共役な運動量だ. 第三に, これらの場はグラスマン数なので, 同時刻反交換関係を使って量子化するということだ. この同時刻反交換関係は以下とそのエルミート共役とする.

$$\begin{aligned} &\{c(\mathbf{k}), c(\mathbf{p})\} = \{c(\mathbf{k}), \bar{c}(\mathbf{p})\} = \{c^\dagger(\mathbf{k}), c(\mathbf{p})\} = 0 \ , \\ &\{\bar{c}^\dagger(\mathbf{k}), c(\mathbf{p})\} = \{c^\dagger(\mathbf{k}), \bar{c}(\mathbf{p})\} = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \ . \end{aligned} \tag{7.118}$$

例題 7.12: 同時刻反交換関係, $-\{c(\mathbf{x},t),\partial_0\bar{c}(\mathbf{y},t)\}=\{\bar{c}(\mathbf{x},t),\partial_0 c(\mathbf{y},t)\}$ $=i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ を証明せよ.

(7.118) の反交換関係による代数によって, 状態 $c^\dagger|0\rangle$ と $\bar{c}^\dagger|0\rangle$ は以下の関係を満たす.

$$\langle 0|\, c(\mathbf{k})c^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle=-\langle 0|\, c^\dagger(\mathbf{p})c(\mathbf{k})\,|0\rangle=0\,. \tag{7.119}$$

このため, これらの状態はゴーストとなる. ここで, 通常の生成・消滅演算子の役割を仮定した. スカラー場に対して反交換関係を用いると, 通常のスピンと統計性の関係を破ることになる. 3 次元空間ではこれは不定計量があるときのみ可能であり [12], これはグラスマン場がゴーストになることに対応している.

これまでに行ったゲージ場の量子化に同等な方法として, ファデーエフ・ポポフ法がある [13]. この方法には, 他の多くの場合にも簡単に適用できるという利点がある. ゲージ自由度をもつどんな理論を量子化する際でも, 基本的に問題となるのはゲージ条件を使って, 運動方程式の持つゲージ自由度を固定する必要があるということだ. ゲージ場の理論では, 同時に存在する拘束条件 $\pi_0=0$ を π_0 をゲージ条件に写像することにより解決する. QED ではゲージ条件を正しく使うことで, あるべき作用を持ち, なおかつゲージ体積が因子として取り出され, 測度がゲージ条件を満たすように経路積分が構成された. さらに, 行列式 Δ_χ があらわれた.

ファデーエフとポポフはこれらの結果が次のように得られることを示した. 出発点は, 正準運動量について積分しただけの, ゲージ固定条件を含まない次の経路積分だ.

$${}_+\langle 0\,|\,0\rangle_-=\int_0^0 \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\eta\,\exp\left\{i\int d^4x\,\mathcal{L}(\eta,A)\right\}\,. \tag{7.120}$$

このような経路積分はゲージ変換全てについて不変であるために, 場の配位を多重に積分しているといえる. そこで, ゲージ条件 $\chi=0$ にもとずいて,

ゲージ体積を取り出さなければならない．これを実行するために，以下の単位因子を測度に挿入する．

$$\Delta_\chi \int \mathcal{D}\Lambda\, \delta(\chi^\Lambda) = 1\ . \tag{7.121}$$

ここで，(7.121) の測度は連続的な意味で，

$$\mathcal{D}\Lambda = \prod_x d\Lambda(x) \tag{7.122}$$

と解釈する．また，量 Δ_χ は (7.121) を満たすように決定され，χ^Λ はゲージ条件 χ が関数 Λ でゲージ変換されたものを意味する．明らかに，ゲージ自由度の数だけ Λ がある．また，ゲージ条件も全てのゲージ自由度の数だけあるとする．さらに，ゲージ変換 Λ には常に逆があるとする．測度と作用はこの逆ゲージ変換のもとで不変であるので，どの Λ についても χ^Λ を χ に逆変換することが可能だ．これにより，経路積分は次のようになる．

$$\begin{aligned} {}_+\langle 0 | 0 \rangle_- &= \int_0^0 \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\eta\, \Delta_\chi\, \mathcal{D}\Lambda\, \delta(\chi^\Lambda)\ \exp\left\{ i \int d^4x\, \mathcal{L}(\eta, A) \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\Lambda \int_0^0 \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\eta\, \Delta_\chi\, \delta(\chi) \exp\left\{ i \int d^4x\, \mathcal{L}(\eta, A) \right\}\ . \end{aligned} \tag{7.123}$$

ここで重要な点は Δ_χ がゲージ変換のもとで不変であることだ．これは右辺が，

$$\Delta_\chi^{-1} = \int \mathcal{D}\Lambda\, \delta(\chi^\Lambda) \tag{7.124}$$

であり，積分が全てのゲージ条件をつくすのでゲージ変換のもとで不変であるという事情による．これは QED では，χ のゲージ変換が単に (7.124) の積分変数の単なる平行移動で打ち消すことができることにより，明らかに正しい．ゲージ空間での測度をいわゆるハーグ測度に一般化してヤン・ミルズ場を取り扱うのには，更に理論を発展させる必要がある．

ゲージ体積因子が得られたので，あと残るのは Δ_χ の計算だ．これには次のように積分変数を χ から χ^Λ に変換すればよい．

$$\Delta_\chi^{-1} = \int \mathcal{D}\Lambda\, \delta(\chi^\Lambda) = \int \mathcal{D}\chi^\Lambda\ \det\left[\frac{\delta\Lambda}{\delta\chi^\Lambda} \right]\ \delta(\chi^\Lambda)\ . \tag{7.125}$$

ここで, 行列式は変数変換のヤコビアンとしてあらわれた. デルタ関数のおかげでこの積分は簡単で,

$$\Delta_\chi = \det \left[\frac{\delta \chi^\Lambda}{\delta \Lambda} \right] \Bigg|_{\chi^\Lambda = 0} \tag{7.126}$$

を得る. ローレンツゲージ条件の場合は, ユークリッド空間で次のようになる.

$$\chi^\Lambda = -\partial_\mu A^\mu + \Box_E \Lambda \ \Rightarrow \ \Delta_\chi = \det \Box_E \ . \tag{7.127}$$

これは以前得られた結果だ. 因子 Δ_χ はファデーエフ・ポポフ行列式として知られていて, (7.113) で導入されたゴースト場 $\bar{c}$ と c はファデーエフ・ポポフゴーストと呼ばれる. 運動量を積分して, 経路積分のローレンツゲージでの最終形が以下のように求まる.

$$\begin{aligned} {}_+\langle 0 | 0 \rangle_- \ = \ & \int \mathcal{D}\Lambda \int_0^0 \mathcal{D}\bar{c}\, \mathcal{D}c\, \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\eta\, \delta(\partial_\mu A^\mu) \exp \Big\{ i \int d^4x\, (\mathcal{L} \\ & - \tfrac{1}{2}\kappa\, (\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu \bar{c}\, \partial^\mu c) \Big\} \ . \end{aligned} \tag{7.128}$$

ここで, $\partial_\mu A^\mu$ を含む項は経路積分の測度に含まれるデルタ関数のために自由に作用に付け加えることができる. これはガウスの法則を第二次拘束条件として扱った場合と同じ結果だ.

(7.87) の拘束された測度を扱った経路積分とここで得られた経路積分を比較しよう. ゲージ固定項無しの経路積分で正準運動量を積分することは簡単で,

$${}_+\langle 0 | 0 \rangle_- = \int \mathcal{D}\eta\, \mathcal{D}A\, \delta(A_0 - A_0^c) \exp \left\{ i \int d^4x\, \mathcal{L}(\eta, A) \right\} \tag{7.129}$$

を得る. ここで, A_0^c は (7.96) で与えられる. A_0 変数は今や経路積分で積分を実行してしまえる. この変数は作用の中の 2 つの項, $-\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i}$ と $-J_0 A_0$ に出てくる. A_0^c を挿入すると, 前者の項は,

$$-\tfrac{1}{2}F_{0i}F^{0i} = \tfrac{1}{2}\dot{A}_i^T \dot{A}_i^T - \tfrac{1}{2}J_0 \left(\frac{1}{\nabla^2} \right) J_0 \tag{7.130}$$

となる．ここで，A_i^T は $\partial_i A_i^T = 0$ に従う A_i の横偏極部分である．これらの項は作用の中にあるので，部分積分が可能であることに注意しておこう．第二の項は以下になる．

$$- J_0 A_0 = -J_0 \left(\frac{1}{\nabla^2}\right) \partial_j \dot{A}_j + J_0 \left(\frac{1}{\nabla^2}\right) J_0 \,. \tag{7.131}$$

$-J^j A_j$ の縦偏極部分は，

$$- J^i A_i = -J^i A_i^T + \partial_j J^j \left(\frac{1}{\nabla^2}\right) \partial_i A_i \tag{7.132}$$

と書けるので，(7.131) の右辺第1項はこの縦波部分と打ち消し合う．ベクトル場の縦偏極部分を含む2つの項を合わせると，

$$\partial_j J^j \left(\frac{1}{\nabla^2}\right) \partial_j A_j - J_0 \left(\frac{1}{\nabla^2}\right) \partial_j \dot{A}_j = \partial_\mu J^\mu \left(\frac{1}{\nabla^2}\right) \partial_j A_j \tag{7.133}$$

となるが，これらの項は，

$$\int_0^0 \mathcal{D}\eta\, \mathcal{D}A\, \partial_\mu J^\mu(y) \exp\left\{ i \int d^4x\, \mathcal{L}(\eta, A) \right\} = 0 \tag{7.134}$$

により捨てることができる．

例題7.13: 8章でネーターの定理が量子論でも成立することをしめすためのテクニックを詳説する．これを念頭において，4.3節のテクニックを使い，(7.134) を証明せよ．

ゲージ場の残りは，

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \partial_i A_j^T - \partial_j A_i^T \tag{7.135}$$

により横偏極だ．このため，経路積分は以下のようになる．

$$\begin{aligned} &{}_+\langle 0 | 0 \rangle_- = \\ &\int_0^0 \mathcal{D}\eta\, \mathcal{D}\mathbf{A} \exp\left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(\eta, \mathbf{A}^T) - \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{1}{\nabla^2}\right) J_0 \right] \right\} . \end{aligned} \tag{7.136}$$

作用には $\mathbf{A}$ の横偏極成分のみがあらわれて，A_0 は消えて電荷密度 J_0 のクーロン相互作用に置き換えられた．しかし，測度は $\mathbf{A}$ の3つの空間成分全てを

含んでいる. したがって, 測度は, 作用にあらわれて物理的に意味のある **A** の 2つの横偏極成分の積分と, 縦偏極部分の積分に分けられる. 後者は, 作用に縦偏極部分があらわれないために, 経路積分から単なる因子となって分離する. この因子は, 他の明白に共変な方法で出るゲージ体積と一致する. (7.136) の最終的な結果は相互作用する理論でのクーロンゲージの経路積分である. 作用に現れる全ての場は横偏極なので, ゲージ条件 $\delta(\Delta \cdot A)$ は全く必要が無い.

共変な経路積分 (7.128) は, (7.136) にくらべてゲージ場が2倍の数の自由度を持ち, さらにファデーエフ・ポポフゴーストというフェルミオン的な自由度を2つ持っているが, 二つの経路積分は全く同等なものだ. この理由は既に議論した. QED の共変な理論のゲージ場のゴースト成分は保存カレントとしか相互作用しないので危険なものではない. したがってそれらは存在してもよい. ゴーストは, どんな物理的な過程, つまり, in 状態にも out 状態にも同数の縦偏極光子と時間的偏極光子を持つ過程についても全く寄与しない. これは QED でファデーエフ・ポポフゴーストは自由で, 理論から分離できることによる. ファデーエフ・ポポフゴーストの役割はユニタリー性を脅かす項を消すことにある. これは共変なゲージで負ノルムやゼロノルムの状態で作られる項を打ち消すことにある. この問題は QED では実際には発生しないので, ファデーエフ・ポポフゴーストは何の役割もしないわけだ. ファデーエフ・ポポフ法で出てきた Δ_χ はQED ではほとんど意味を持たないが, 他の理論では必ずしもそうではない. ファデーエフ・ポポフゴーストはゲージ場のゴースト成分を打ち消す役割をするので, ファデーエフ・ポポフゴーストを負の自由度を持つとみることも可能だ. この見方ではローレンツゲージとクーロンゲージの二つの経路積分は同じ自由度を持つといえる.

ゲージ条件をゲージ変換して得られたファデーエフ・ポポフ行列式が, なぜ第二の拘束条件であるガウスの法則を適用して得られた測度を再現するのか, という微妙な問題を考えることは意味がある. この2つの方法は非常に一般的な状況で同等だと証明することができる. しかし, その議論は, ゲージ

変換を非アーベル群に拡張した方が興味あるものとなる. この同等性の証明は 7.5 節で与える.

7.3　リー代数

次の節では, 前節の QED のゲージ場の解析をヤン・ミルズゲージ場に応用する. ヤン・ミルズ場を構成する鍵はゲージ変換を**非可換** (nonabelian) 群の場合に拡張することだ. 6.2 節では, ローレンツ群を中心に非可換群の性質を初歩的に述べたが, ここでは色々な群とその代数をより一般的に扱う [14,15]. 詳細な議論にはより多くの頁を必要とするが, ここで少なくとも基本が明確になるはずである.

多くの群は正方行列の集合として理解できる. たとえば, ユニタリーで行列式が 1 の $n \times n$ 行列の集合は**特殊ユニタリー群** (special unitary group), SU(n) をなす. また, 行列式が 1 の $n \times n$ 直交行列の集合は**特殊直交群** (special orthogonal group) SO(n) をなす. 行列式にゼロでないどのような値も許すことにするとそれぞれ群は U(n) と O(n) になる.

例題 7.14: SO(n) の要素は $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個の自由なパラメータで記述されることをしめせ. また, SU(n) では $n^2 - 1$ 個のパラメータが必要であることをしめせ.

群を特徴づけるパラメータの数は群の**次数** (order) と呼ばれる. 前に述べた 2 つの場合では, 行列が群の中に留まったままパラメータが連続的に変化することができる. このため, これらの群は**連続群** (continuous group) と呼ばれる. 物理で重要な他の連続群に, **シンプレクティック群** (symplectic group) Sp($2n, C$) と**例外群** (exceptional group) がある. シンプレクティック群は, $2n$ 次元の表現空間 $x = (x_1, ..., x_n, x'_1, ..., x'_n)$ に働く $2n \times 2n$ 複素行列であり, 2 つのベクトルの反対称積, $x_i y'_i - x'_i y_i$ を保存するものをいう. このシンプレクティック群 Sp($2n, C$) は $2n(2n+1)$ 個の自由パラメータをもつ. 例外群は

5 つしかなく, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 と名付けられている. これらは行列の集合としては一言で定義できず, 順に, 14, 52, 78, 133, 248 個の自由パラメータをもつ.

群が持つパラメータの空間は多様体をなす. この多様体がコンパクトならば, この群も**コンパクト** (compact) であるという. 6.2 節で論じたローレンツ群はコンパクトではないが, SU(n) はコンパクトだ. また, これは必ずしも必要なことではないが, 通常, 群の全てのパラメータは単位元についてゼロとなるように選ぶ. これにより, ある群の p 個のパラメータを$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p)$ として, ある要素を $A(\alpha)$ と書くとき, これを単位元の近くで展開して,

$$A(\alpha) \approx A(0) + i\,\alpha_k \left.\frac{\partial A}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=0} \equiv I + i\,\alpha_a T^a \tag{7.137}$$

とできる. p 個の行列 T^a は群の**生成子** (generator) として知られている. そして, これらの生成子の積の間の関係は群の**局所的**な性質を定義する. また, 生成子の数は群の次数と一致している. (7.137) では i を入れているが, これは後で便利なためである.

$A(\alpha)$ と $A(\beta)$ が単位元に近い要素とする. このとき, 群が閉じているので, 群の要素で $A(\alpha)A(\beta) = A(\gamma)$ で $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ となる $A(\gamma)$ が存在しなければならない. また, 同様に, $A(\beta)A(\alpha) = A(\gamma')$ で $\gamma' = \gamma'(\alpha, \beta)$ となる $A(\gamma')$ も存在しなければならない. 群の連続性から, これらの二つの要素も単位元に近い. 単位元の定義により, $\gamma(0, 0) = 0$ だ. そこで, 関数 γ は単位元の近くでテイラー展開できることがわかる. この展開を以下のように書く.

$$\gamma_c(\alpha, \beta) \approx \alpha_a \left.\frac{\partial \gamma_c}{\partial \alpha_a}\right|_{\alpha,\beta=0} + \beta_a \left.\frac{\partial \gamma_c}{\partial \beta_a}\right|_{\alpha,\beta=0} + \alpha_a \beta_b \left.\frac{\partial^2 \gamma_c}{\partial \alpha_a\, \partial \beta_b}\right|_{\alpha,\beta=0} . \tag{7.138}$$

α の 1 次では $A^{-1}(\alpha) = A(-\alpha)$ が成立する. このため,

$$\gamma_c(\alpha, -\alpha) \approx \alpha_a \left.\left(\frac{\partial \gamma_c(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_a} - \frac{\partial \gamma_c(\alpha, \beta)}{\partial \beta_a} \right)\right|_{\alpha,\beta=0} = 0 \tag{7.139}$$

となる. これにより,

$$\left.\frac{\partial \gamma_c(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_a}\right|_{\alpha,\beta=0} = \left.\frac{\partial \gamma_c(\alpha, \beta)}{\partial \beta_a}\right|_{\alpha,\beta=0} \tag{7.140}$$

がわかる.

$A(\alpha)$ と $A(\beta)$ の交換子を, (7.137) の微小形を使って計算すると,

$$[A(\alpha), A(\beta)] = A(\gamma) - A(\gamma') \Rightarrow$$
$$\alpha_a\beta_b[T^a, T^b] = -i(\gamma_c - \gamma'_c)T^c = -i[\gamma_c(\alpha,\beta) - \gamma_c(\beta,\alpha)]T^c \quad (7.141)$$

となる. ここで, γ を展開し (7.140) の恒等式を使うと, 微小な場合には次が成立することがわかる.

$$\begin{aligned}\gamma_c(\alpha,\beta) - \gamma_c(\beta,\alpha) &= \left(\frac{\partial^2\gamma_c(\alpha,\beta)}{\partial\alpha_a\,\partial\beta_b} - \frac{\partial^2\gamma_c(\alpha,\beta)}{\partial\alpha_b\,\partial\beta_a}\right)\Bigg|_{\alpha,\beta=0}\alpha_a\beta_b \\ &\equiv -f^c_{ab}\alpha_a\beta_b\,. \end{aligned} \quad (7.142)$$

これにより, f^c_{ab} は群の構成を特徴づける定数の組になっていることがわかる. これを (7.141) に代入すれば,

$$[T^a, T^b] = i\,f^c_{ab}T^c \quad (7.143)$$

が成立することがわかる. この代数関係を**リー代数** (Lie algebra) という. また, f^c_{ab} は**構造定数** (structure constant) と呼れて, $f^c_{ab} = -f^c_{ba}$ という性質を持つ. トレースの巡回性より, $\mathrm{Tr}[T^a, T^b] = 0$ であるから, 全ての生成子はトレースがゼロであることがわかる.

例題 7.15: 群 SU(2) の生成子がパウリ行列 σ_j であり, 構造定数が $f^i_{jk} = 2\epsilon_{ijk}$ であることをしめせ.

リー代数の発想は行列で定義される連続群から派生しているが, リー代数自身はそれとは独立な概念とみなされるべきだ. リー代数の生成子は, 一般的には表現空間に働く演算子と考えられる. 表現空間を特定すると, 生成子が表現空間の内積を用いて, 行列の形に表わされる. そして, この行列であらわされた生成子は古典群の代数を再現する. これは量子力学の行列表現に似ている. たとえば, 量子力学での 3 つの角運動量はリー代数をなす. そし

て, その表現は, それが回転する, または**変換する**表現空間によって色々な表現をとる. この理由により, リー代数をみたす行列の集合をその代数の**表現** (representation) という. 異なる行列の集合が同じ代数を満たすことがあるといっても驚くに足らないだろう. 物理でもっとも馴染みのある例には, 軌道角運動量を表わす SO(3) の代数と電子のスピン角運動量を表わす SU(2) の一致がある. この代数が同じであることは, 群 SU(2) と群 SO(3) が単位元の**近傍**では同じであることを意味する. 二つの群の違いはそれらの**大域的**性質によっていて, それは, 有限距離離れた要素を調べてはじめてわかる.

(7.143) を, 恒等式

$$\Big[[T^a, T^b], T^c\Big] + \Big[[T^b, T^c], T^a\Big] + \Big[[T^c, T^a], T^b\Big] = 0 \tag{7.144}$$

に代入すると, 構造定数が次を満たすことがわかる.

$$f^a_{bc} f^d_{ea} + f^a_{ce} f^d_{ba} + f^a_{eb} f^d_{ca} = 0\ . \tag{7.145}$$

これを**ヤコビ恒等式** (Jacobi identity) という. このヤコビ恒等式はそのリー代数が少なくとも一つの表現を持つことを保証する. その要素が $T^a_{(bc)} = -i f^c_{ab}$ である行列を T^a とすれば, (7.145) の恒等式から, (7.143) の代数が満たされることがしめせる. この表現を**随伴表現** (adjoint representation) という.

生成子を利用すれば, 微小要素を繰り返して掛けて, パラメータがゼロに近くない有限要素が作れる. 有限なパラメータを Λ_a とすると, Λ_a/N のパラメータで定義される微小要素を N 回掛けて, Λ の要素が作れる. これにより $N \to \infty$ の極限では, 有限要素 U が

$$U \equiv \lim_{N\to\infty} (I + \frac{i}{N}\Lambda_a T^a)^N = \exp i\Lambda_a T^a \tag{7.146}$$

と求まる. T^a を表現する行列がエルミートならば, (7.146) はユニタリー行列になる. 上の式は量子力学でのユニタリー変換と形が同じだが, これは両方が共に表現空間上での連続変換に伴う群に基づいているという事情による.

代数の生成子の内で互いに可換, つまり, 可換部分代数をなす**最大**部分集合を**カルタン部分代数** (Cartan subalgebra) と呼ぶ. SO(3) 代数にしたがう軌

道角運動量とか, SU(2) のスピン角運動量のように, この集合には要素は一つしかない場合もある. この部分代数の全ての要素は可換だから, 表現空間は全ての基底がこれらの生成子の固有状態であるように選ぶことができる. つまり, 表現空間はカルタン部分代数に属する生成子の固有値で特徴づけることができることを意味する. もし, 表現空間が量子力学的なヒルベルト空間ならば, カルタン部分代数の固有値は状態の量子数となる. そして, カルタン部分代数を観測量の集合に加えることができる. カルタン部分代数の生成子の数はリー代数の**ランク** (rank) と呼ばれる. つまり, 表現空間の状態はランクと同じ数の固有値で特徴づけられることがわかる. 固有値のとれる値の範囲は群の大域的な性質による.

カルタン部分代数の要素を H^a と書く. もし, ランクが r なら, 抽象的に表現空間を $|\mu_1,...,\mu_r\rangle$ とあらわす. ここで, μ_a は H^a の固有値を意味する. しかし, 全ての固有値の組み合わせが表現空間で許されるわけではない. 許される固有値の組は**ウェイト** (weight) と呼ばれる. この構造を見るためにランクが **1 ではない**代数を考えよう. たとえば, SU(3) はランクが 2 であり, その一番小さな自明でない表現は $3^2-1=8$ 個の 3 行 3 列の行列からなる. カルタン部分代数のある表現は, 以下で与えられる.

$$H_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad H_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}. \tag{7.147}$$

残りの行列は

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \lambda_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$
$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\ \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\ \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} \tag{7.148}$$

で与えられる. この表現をゲルマン表現という. この表現では $\mathrm{Tr}(T^aT^b)=2\delta_{ab}$ が成立している. 許されるウェイトはカルタン部分代数の対角成分から

わかり,

$$\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \tag{7.149}$$

となっている.

SU(3) 代数は閉じているので, 他の 6 つの生成子はウェイトを (7.149) のなかで "上げ" たり, "下げ" たりする. したがって, SU(3) は量子力学で角運動量を扱ったときと同様に扱うことができる. 角運動量では, J_z が SO(3) または SU(2) のカルタン部分代数の要素として対角化されている. 残りの 2 つの演算子は $J_+ = J_x + iJ_y$ と $J_- = J_x - iJ_y$ として J_z の固有値を, それぞれ上げ下げする. これらの二つの代数のウェイトは, 単に J_z の全ての可能な固有値だ. したがってウェイトの空間は 1 次元だ. SU(3) の場合はウェイト空間は 2 次元で, 残りの演算子はこの 2 次元空間での移動を行う. この移動の部分, つまり, ウェイトの差は**ルート** (root) と呼ばる. 全てのルートを求めるには, ウェイトをベクトルとして扱い, それらの間の全てのゼロでない差を見つければよい. SU(3) の (7.147), (7.148) の表現では, ウェイトは (7.149) の 3 つがあるので, ルートは,

$$\left(1, -\sqrt{3}\right), \quad \left(1, \sqrt{3}\right), \quad (2, 0) \tag{7.150}$$

と, これを全て逆方向にした 6 つのベクトルで与えられる. その構成法により, ルートは必ず逆向きの関係にある 2 つのベクトルの組からなっている. 一般に, 最初のゼロでない要素が負のルートを全て捨てて, SU(3) の場合の (7.150) に相当する**正のルート** (positive root) のみを残すことにする. そして, 正のルートのうち, 他の 2 つの正のルートの和（差ではなく）として表わされるものも落とす. これをその群の**単純ルート** (simple root) と呼ぶ. SU(3) の場合には (7.150) の 3 番目のルートが落ちて, 単純ルートとしては次のものだけが残る.

$$\left(1, \sqrt{3}\right), \quad \left(1, -\sqrt{3}\right). \tag{7.151}$$

このような取扱いは物理にあらわれる全てのリー代数について可能だ. このルートの概念を使って, リー代数のカルタン基底という生成子の記述がで

きる．ここでは, カルタン部分代数に属さず, 正のルート α_a に対応する生成子は, E_α と書かれる．どの E_α にも負のルートに相当して $E_{-\alpha}$ がある．H^a と $E_{\pm\alpha}$ の交換関係は,

$$[H^a, E_\alpha] = \alpha_a E_\alpha \tag{7.152}$$

だ．これは J_z と $J_\pm$ の交換関係の多次元への拡張となっている．E_α は以下の関係式を満たす．

$$[E_\alpha, E_\beta] = F(\alpha,\beta)E_{\alpha+\beta}\,,\ \ \alpha \neq -\beta\,. \tag{7.153}$$

ここで, $F(\alpha,\beta)$ は二つのルートに依存した数であり, また,

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_a H^a \tag{7.154}$$

が成立する．一旦, カルタン部分代数から許されるウェイトが決まれば, 全てのルートは簡単に決定することができる．全てのルートがわかれば, 単純ルートに相当したα の組を必ず見つけることができる．

ルート, 特に単純ルートの構造を使ってリー代数を完全に分類することが可能だ．それに関する定理も数多くある．たとえば, 単純ルートの数はその代数のランク r と一致することがしめせる．さらに, 単純ルートの組は r 次元のウェイト空間でのルート間の角度を使って分類できる．α と β の二つの単純ルートの間の角度は, 次で求められる．

$$\theta = \arccos\left(\frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha|\,|\beta|}\right)\,. \tag{7.155}$$

SU(3) の場合は (7.151) の２次元の単純ルートが２つあるだけだ．それらの間の角度は, $\theta = \arccos(-1/2) = 2\pi/3$ だ．一般にリー代数の単純ルートの間の角度は, 集合 $(\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6)$ のどれかでなければならないことが知られている．単純ルートの間の相対的な長さと角度は**ディンキン・ダイヤグラム** (Dynkin diagram) といわれるものを使って, 図形的にあらわすことができる．全ての可能なディンキン・ダイヤグラムを調べることで, 全てのルート構造がわかり, その結果, 可能なリー代数を全て求めることができる．ルー

ト構造をこのように調べることで, 例外群の存在が最初にわかった. 残念だが, リー代数のルート構造とディンキン・ダイヤグラムの詳細な議論はこの本の範囲を越えている.

リー代数がカルタン基底で表現されれば, ユニタリー変換を使って, 新しい生成子が次の式を満たすようにできる場合がある.

$$\mathrm{Tr}\,(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}\,. \tag{7.156}$$

この場合, リー代数は**半単純** (semisimple) であるという. 代数が半単純であるかどうかを決定する方法はいくつかある. 最も単純な方法は, 代数の**計量テンソル** (metric tensor) を調べる方法だ. 計量テンソルは, 構造定数から,

$$g_{ab} = g_{ba} = f^c_{ad}\, f^d_{bc} \tag{7.157}$$

と決められる. この計量テンソルが $\det g \neq 0$ のときにのみ, 代数は半単純だ. また, その証明には手間がかかるが, 代数が半単純ならば, 他の生成子の全てと可換な生成子は存在しないことがいえる. SU(n), SO(n), Sp($2n, C$) と例外群は全て半単純だ.

コンパクトな半単純代数のみを考えることにすると, いろいろと便利だ. たとえば, コンパクトな半単純代数の構造定数は, 次の式にしたがう.

$$f^a_{bc} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(f^d_{bc} T^d T^a) = -\frac{1}{2} i \mathrm{Tr}\,([T^b, T^c] T^a)\,. \tag{7.158}$$

トレースは巡回置換で不変だから, コンパクトな半単純代数の構造定数は $f^a_{bc} = f^c_{ab} = f^b_{ca}$ を満たす. つまり, 構造定数は全ての添字について完全に反対称になっている. さらに, 全てのコンパクトな半単純代数の既約表現にはエルミートな生成子がある. この性質は, 共役表現では構造定数の巡回性から簡単に示すことができる. 実際, この場合は生成子の行列表現は $T^a_{(bc)} = -if^c_{ab} = -if^a_{bc}$ となり, f^c_{ab} の反対称性によりエルミートになっている.

いちど計量テンソルがわかれば, **カシミア演算子** (Casimir operator) $C = g_{ab}T^a T^b$ を定義できる.

例題7.16: カシミア演算子がリー代数の全ての要素と可換であることをしめせ.

これまでに述べたことの証明と, 他の重要なリー代数とその表現の性質については, このテーマを扱った多くの本があるので, それを参照するとよい [14,15].

7.4 古典的ヤン・ミルズ場

この節では QED ゲージ場の一般化をする. 基本的なアイデアは QED のゲージ変換を非可換群に一般化することにある. ゲージ変換はあるリー代数にともない, 表現空間は, 通常**多重項** (multiplet) と呼ばれる物質場に相当する.

この出発点は自然にあらわれる粒子の多くが似通った性質を持つということにある. その最も明らかな例は同じような質量とスピンを持つ粒子だ. 標準模型があらわれるよりずっと前から, 似た粒子を多重項に入れることが考えられた. その添字は**アイソスピン** (isospin) とよばれ, それは**内的** (internal) 対称性の存在を反映するものと考えられた. 多重項の相互作用を表わす非線形項は時空上で一定のアイソスピン変換のもとで不変であるように構成された. 以下ではスピノルとローレンツの添字は簡単のため省略して論じる. いま, ψ^k を多重項に属する場とする. アイソスピン変換は, この多重項を表現空間とする群の任意の要素を $\mathbf{U}$ として, $\psi^j \to U_{jk}\psi^k$ だ. このアイデアとしては最初中性子と陽子を SU(2) の多重項とすることが考えられ [16], 次に低い質量のハドロンを SU(3) の多重項とする形に進化した [17]. これらは, 粒子の質量が異なるために, 近似的な対称性だと考えられた. しかし, 同じ多重項に属する粒子の相互作用の仕方は非常に良く一致していることが実験的にわかった. この対称性が一度仮定されると, ネーターの定理を使って対称性にともなう一般化されたチャージを計算できて, このチャージの近似的な保存則から粒子のダイナミクスについて予言ができることになる.

これまでに考えた $\mathbf{U}$ の変換は, 場の時空変数によらず同じだという意味で, 大域的なものだ. ヤン (Yang) とミルズ (Mills) は, $\mathbf{U}$ にあらわれるパラメータが時空の関数である場合にも不変な作用を構成した [18]. これは QED のゲージ変換の非可換版になっている. つまり, QED のゲージ変換は,

$$\psi(x) \to e^{ie\Lambda(x)}\psi(x) \tag{7.159}$$

であるが, このような変換は, 二つのゲージ変換の順序は変換された場が最後に持つ位相に関係が無いという意味で可換だ. リー代数の言葉を使うと, 時空の各点でのゲージ変換は, 1 パラメータのユニタリー変換の集合, 可換群 U(1) の表現になっている. U(1) は単に全ての可能な位相の集合だ.

QED のゲージ変換は電荷保存を保証する大域的な U(1) 対称性を, U(1) の唯一のパラメータを時空に依存させることによって**局所的**な U(1) 対称性に格上げしたものだ. 複素スカラー場の議論から, ゲージ場無しの理論でも大域的にはU(1) 不変, 位相不変でありえることがわかっている. しかし, 局所的に U(1) 不変であるには余分な場, つまり QED のゲージ場を導入しなければならない. さらに, この局所的対称性を課すことで, 物質場とゲージ場の相互作用の形が非常に限られる. 同様に, 非可換対称性を大域的なものから局所的なものに格上げするにはヤン・ミルズ場が存在しなければならず, また, 相互作用もこの局所的対称性のために非常に形が制限されることになる.

これ以降コンパクト半単純代数のみを考える. これには (7.156) を満たす基底がとれるという利点がある. また, 生成子は, どの表現でも有限次元でのエルミート行列であらわされる. これにより, (7.146) の有限要素はどれも**ユニタリー**行列になる. もし $\mathbf{U}$ がコンパクト半単純リー代数 G のある既約表現の要素ならば, $\mathbf{U}$ はパラメータ Λ^a と生成子 T^a を使って $\mathbf{U} = \exp(ig\Lambda^a T^a)$ とあらわされる. 実数 g は結合定数で非可換群で電荷に相当するものだ.

簡単のために特定な場合を考える. 質量の無いスピノルの多重項を ψ^j と書いて, これを使って大域的変換のもとで不変な作用をつくろう. 明らかに多重項の次元は表現の次元と一致しなければならない. 変換は, $\psi \to \mathbf{U}\psi$ と

$\bar{\psi} \to \bar{\psi}\mathbf{U}^\dagger$ だ．半単純代数では $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}$ なので, $i\bar{\psi}^j \partial\!\!\!/ \psi^j$ はローレンツ不変であると同時に$\partial_\mu \mathbf{U} = 0$ を満たす変換のもとで不変だ．これを局所対称性に格上げするには, 群のパラメータを $\partial_\mu \Lambda^a \neq 0$, $\partial_\mu \mathbf{U} \neq 0$ と時空に依存するようにすればよい．そうすると, この項はそのままでは不変でなくなり, 局所変換のもとで,

$$i\bar{\psi}^j \partial\!\!\!/ \psi^j \to i\bar{\psi}^j \partial\!\!\!/ \psi^j + i\bar{\psi}^j \gamma^\mu U_{jk}^{-1} \partial_\mu U_{kl} \psi^l \tag{7.160}$$

と余分な項を生じる．ここで, γ 行列はいま書いていないスピノルの添字にのみかかり, $\mathbf{U}$ はアイソスピンの添字のみにかかることを注意しておこう．アイソスピンの添字も以下では省略する．

(7.160) の非可換な場合の結果は可換群 U(1) の場合と非常に異なる．代数の非可換性から, $\partial_\mu \mathbf{U} = i\partial_\mu \Lambda^a T^a \mathbf{U}$ とはならない．だが, 可換な場合に似せて作用の不変性を取り戻すために, $\mathbf{U}$ と同じ次元の時空に依存した行列 $A_\mu(x)$ を導入する．これらの項を,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi \tag{7.161}$$

と組み合わせて, これを不変にするには, $A_\mu(x)$ が $\psi(x)$ と同時に

$$A'_\mu = \mathbf{U}A_\mu\mathbf{U}^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^{-1} \tag{7.162}$$

と変換されればよい．

例題 7.17: (7.162) の変換のもとで (7.161) が不変であることをしめせ．

$\mathbf{U}$ が U(1) の要素である場合には, $\mathbf{U} = \exp ig\Lambda$ と書けて, (7.162) は QED のゲージ場の変換則となる．$\mathbf{U}$ が微小であるときには, $\mathbf{U} \approx 1 + ig\Lambda^a T^a$ となり, (7.162) は

$$A'_\mu \approx A_\mu + ig\Lambda^a[T^a, A_\mu] - \partial_\mu \Lambda^a T^a + O(\Lambda^2) \tag{7.163}$$

と書ける．$g \to 0$ の極限では, (7.163) の交換子は効かず, 群の次数だけの可換ゲージ場がある場合に帰着する．(7.163) の第3項はその意味で標準的な

可換ゲージ場のゲージ変換に似ているので, A_μ も

$$A_\mu = T^a A_\mu^a \tag{7.164}$$

と展開する. そうすると, ゲージ場 A_μ^a は以下で定義される.

$$A_\mu^a = 2\,\mathrm{Tr}\,(T^a A_\mu)\ . \tag{7.165}$$

したがって, ゲージ場の数は群の次数と一致する. (7.143) のリー代数の定義を (7.163) に適用するとゲージ変換の微小形は

$$A_\mu^a{}' T^a = A_\mu^a T^a - \partial_\mu \Lambda^a T^a - g f_{ab}^c \Lambda^a A_\mu^b T^c \tag{7.166}$$

になり, したがって, ゲージ場自身の微小変換は

$$A_\mu^a{}' = A_\mu^a - \partial_\mu \Lambda^a - g f_{bc}^a\, \Lambda^b\, A_\mu^c \tag{7.167}$$

となる. この変換は, 一次の微小形でもゲージ場を混ぜる働きがあり, 従って, 非線形だ.

U(1) QED のときと同じように, ゲージ場の作用を構成する必要がある. これにはゲージ共変な微分 D_μ を QED と同じように,

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \tag{7.168}$$

と作ればよい. この共変微分は

$$D'_\mu \psi' = D'_\mu \mathbf{U}\psi = \left(\partial_\mu + igA'_\mu\right)\mathbf{U}\psi = \mathbf{U}D_\mu\psi \tag{7.169}$$

という性質がある. (7.169) はまた,

$$D'_\mu = \mathbf{U}D_\mu\mathbf{U}^{-1} \tag{7.170}$$

とも書ける. (7.170) は共変微分の場合について書かれているが, このように変換するものは全て**ゲージ共変** (gauge covariant) であるという. ゲージ共変なものの積のトレースは必ずゲージ不変である, つまり

$$\mathrm{Tr}\,(A\cdots B) \rightarrow \mathrm{Tr}\,(\mathbf{U}A\mathbf{U}^{-1}\cdots\mathbf{U}B\mathbf{U}^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(A\cdots B) \tag{7.171}$$

だ. したがって, ゲージ共変な量を使うと, 簡単にゲージ不変な量が作れる.

この性質から, 共変微分を使って作用を以下のように構成できる. まず, QED では $F_{\mu\nu}$ テンソルは以下のように書かれることに着目する.

$$\frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,. \tag{7.172}$$

非可換ゲージ共変微分は可換極限でこの形に帰着するから, 非可換な場合にも同じ量を考えることは自然だ. D_μ はゲージ共変だから, その交換子もまたゲージ共変であることが保証されている. そのため, 非可換な場合の行列 $F_{\mu\nu}$ が以下のように構成できる.

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \,. \tag{7.173}$$

例題 7.18: (7.173) が (7.162) のもとでゲージ共変であることを直接にしめせ.

(7.171) の結果から, 以下の量,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{7.174}$$

がローレンツ不変, ゲージ不変であることがわかる. (7.156) の条件を使ってこのトレースを実際に計算すると,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{7.175}$$

となる. ここで $F^a_{\mu\nu}$ は,

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^a_{bc}\, A^b_\mu\, A^c_\nu \tag{7.176}$$

で与えられる反対称テンソルだ. この形では, 作用 (7.174) は $g \to 0$ の極限で可換な場合の和になることが明らかだ.

例題 7.19: (7.175) と (7.176) を確かめよ.

非可換なゲージ不変性を要求することによってゲージ場の作用が 2 次の項のみではすまずに, 相互作用する理論になっていることがわかった. 物質場の無いときのオイラー・ラグランジュ運動方程式は,

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} - g f^a_{bc} A^b_\mu F^{c\mu\nu} = 0 \tag{7.177}$$

となる. ここで, リー代数の構造を簡潔に反映するような, SO(3) に類似した便利な記法を導入する. リー代数が SU(2) か SO(3) ならば, 構造定数は ϵ_{abc} であり, (7.177) の第 2 項は群空間でのベクトル積になる. したがって, 一般的に, この第 2 項はより複雑な系にこのベクトル積を一般化したものと考えることができる. その最初のステップとして, 共変微分を群の添字をつけて

$$D^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - g f^a_{cb} A^c_\mu \tag{7.178}$$

と書く. ベクトル積との類似から, この共変微分は群の添字を書かずに,

$$D_\mu = \partial_\mu - g A_\mu \times \tag{7.179}$$

とあらわせる. これによって, (7.177) は,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - g A_\mu \times F^{\mu\nu} = D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{7.180}$$

と簡潔にあらわせる. ゲージ変換 (7.167) の微小形は以下のように書ける.

$$A_\mu \;\rightarrow\; A_\mu - D_\mu \Lambda\,. \tag{7.181}$$

(7.161) の物質場との結合は, (7.165) のゲージ場の要素を使って書ける. スピノル場とゲージ場の添字をあらわに書くと, この相互作用は,

$$g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi = g\bar{\psi}^j T^a_{(jk)} \gamma^\mu \psi^k A^a_\mu \equiv j^{a\mu} A^a_\mu \tag{7.182}$$

となる. したがって, 物質場も含んだゲージ場の運動方程式は, 添字を省略して以下で与えられる.

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \;\equiv\; j^{a\nu} T^a\,. \tag{7.183}$$

スピノル場の運動方程式を使って, 物質場のカレント j^a_μ が保存**されない**ことをしめせる. しかし, $F^a_{\mu\nu}$ の反対称性と物質場が結合した理論の運動方程式を使って, ゲージ不変性にともなう保存カレントを見つけることができる. 実際, 以下で定義するカレント J^a_μ,

$$J^{a\mu} \equiv \partial_\nu F^{a\nu\mu} = g f^a_{bc} A^b_\nu F^{c\nu\mu} + j^{a\mu} \tag{7.184}$$

は, $F^a_{\mu\nu}$ が反対称性なので, $\partial_\mu J^{a\mu} = \partial_\mu \partial_\nu F^{a\mu\nu} = 0$ を満たす.

> **例題 7.20**: ゲージ変換の微小形を使って, ネーターの定理から J^a_μ が非可換ゲージ不変性にともなうカレントであることをしめせ.

物質場のカレント, $j_\mu = j^a_\mu T^a$ はゲージ共変に変換される. これは (7.183) を変換して,

$$j'_\nu = D'_\mu F^\mu{}_\nu{}' = \mathbf{U} D_\mu F^\mu{}_\nu \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} j_\nu \mathbf{U}^{-1} \tag{7.185}$$

となることでわかる. 物質場のカレントは保存はされないが, 以下のように, 保存則をゲージ共変に拡張した関係式を満たす.

$$D_\mu j^\mu = \partial_\mu j^\mu - g A_\mu \times j^\mu = 0 \,. \tag{7.186}$$

微小なゲージ変換のもとで j^a_μ は以下のように変換する.

$$j^a_\mu \;\to\; j^a_\mu + g f^a_{bc} j^b_\mu \Lambda^c \,. \tag{7.187}$$

> **例題 7.21**: (7.186) と (7.187) をたしかめよ.

物質場と異なり, 保存カレント $J_\mu = j^a_\mu T^a$ はゲージ共変ではない. この対照的な状況はゲージ場が外場と相互作用する場合にもある. 外場との相互作用がゲージ不変ならば外場カレントが保存されないし, 外場カレントが保存されれば, 外場との相互作用がゲージ不変ではない. これは 8 章でまた論じる.

非可換物質場のカレントが保存されず, QED の物質場のカレントが保存されるのを理解するのは難しくはない. 可換ゲージ場は電荷を持たず, 全ての

電荷は物質場が持っている．非可換な場合はそうではなく，ゲージ場も自己相互作用し，物質場のように非可換チャージを持っている．したがって，物質場とゲージ場を組み合わせたものが，非可換チャージを保存することになる．

例題 7.22: 物質場として複素スカラーの多重項をとり，ヤン・ミルズ場とのゲージ不変な相互作用を書き出せ．

7.5 量子ヤン・ミルズ場

ヤン・ミルズ場の量子化は経路積分で最もうまくできる．これはまた，正準量子化が単純にはうまくいかない理論の例でもある．出発点としてヤン・ミルズ場がスピノル場の多重項と相互作用する古典的な作用をとる．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}(\bar{\psi},\psi) - j^a_\mu A^{a\mu}\ . \tag{7.188}$$

ここで，$\mathcal{L}(\psi)$ は多重項の各スピノル場についての自由な作用だ．ここでは 7.2 節で開発した可換な場合の経路積分を非可換な場合に拡張する事を考える．以前と同様に連続的な測度を用い，行列式はユークリッド空間で求めたものとする．

正準運動量を導入する際には問題が生じる．ゲージ場の作用から，

$$\pi^a_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^{a\mu})} = F^a_{\mu 0} = \partial_\mu A^a_0 - \partial_0 A^a_\mu - g f^a_{bc} A^b_\mu A^c_0 \tag{7.189}$$

がなりたつので，以前と同じように $\pi^a_0 = 0$ となる．したがって，ゲージ条件と第二次拘束条件を導入する必要がある．前と同じく，理論をファインマンゲージで量子化することにする．非可換な場合には，作用に $-\mathrm{Tr}(\partial_\mu A^\mu)^2$，つまり，$-(1/2)\partial_\mu A^{a\mu}\partial_\nu A^{a\nu}$ を加える．そうすると，正準運動量は $\pi^a_0 = -\partial_\mu A^{a\mu}$ になる．このとき，この非可換ファインマンゲージでのハミルトニアン密度は，次で与えられる．

$$\mathcal{H}_x \quad = \quad -\frac{1}{2}\pi^a_0\pi^a_0 + \frac{1}{2}\pi^a_j\pi^a_j + \pi^a_0\partial_j A^a_j - \pi^a_j\partial_j A^a_0 + g f^a_{bc}\,\pi^a_j A^b_j A^c_0$$

$$+\frac{1}{4}F^a_{jk}F^a_{jk} + j^a_\mu A^{a\mu} + \mathcal{H}(\psi^j, \bar{\psi}^j) \,. \tag{7.190}$$

ここで $\mathcal{H}(\psi^j)$ は標準的な自由スピノルのハミルトニアン密度だ. ヤン・ミルズ経路積分にあらわれる正準運動量を積分する前の作用は,

$$\mathcal{L}_\chi = \pi^{a\mu}\dot{A}^a_\mu - H_\chi + \mathcal{L}(\psi^j) \tag{7.191}$$

となる.

ハミルトニアンで部分積分が可能だとして, 第二次拘束条件から非可換な場合でのガウスの法則に相当する条件がでる.

$$\dot{\pi}^a_0 = G^a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A^a_0} = -\partial_j \pi^a_j + g f^a_{bc} A^b_j \pi^c_j - j^a_0 = 0 \,. \tag{7.192}$$

これをアイソスピンの添字を使わずにあらわすと,

$$G = -\partial_j \pi_j + g A_j \times \pi_j + j_0 = -D_j \pi_j - j_0 = 0 \tag{7.193}$$

となる. 正準運動量の定義を使えば, 第二次拘束条件は以下となる.

$$G = \partial_j \dot{A}_j - \nabla^2 A_0 + g\partial_j (A_j \times A_0) + g A_j \times (\partial_j A_0 - \partial_0 A_j) - j_0 = 0 \,. \tag{7.194}$$

(7.194) の非線形な第二次拘束条件は QED の場合と非常に異なる. QED では, 第二次拘束条件はゲージ場について線形で, 電荷分布がわかればそれを解いて A_0 の形が特定できた. 非線形な場合はそれと全く異なる状況で, 解を**特定できない**. 古典的な場合でも, (7.194) には $j_0 = 0$ の場合でさえ自明でない解があり, これが量子化に問題を引き起こす. 経路積分ではこの困難は拘束された測度の等価性を壊す. これは,

$$\delta(\pi_0) \det \left(\frac{\delta G}{\delta A_0} \right) \delta(G) = \delta(\pi_0) \delta(A_0 - A^c_0) \tag{7.195}$$

において, 第二次拘束条件 $G = 0$ をみたす解が唯一でないために, $\delta(G)$ の逆に任意性が生じるためだ. この困難は**グリボフ不定性** (Gribov ambiguity) [19] と呼ばれる. これについては次節で理論の古典的構造のトポロジー的局面を論じる際により詳しく議論することにして, とりあえずはこの問題を無

視し, 量子化の一般的なテクニックを使う. 通常, 問題となるのは“大きな”古典的なゲージ場の配位であるため, 摂動で“小さな”配位を扱っているときには, グリボフ任意性を無視しても問題が無いとも考えられている [11].

ゲージ場の量子化で, ファデーエフ・ポポフの方法と, ガウスの法則を経路積分の測度に対する拘束条件として扱う方法の等価性を考える. これまでの解析で, 一般的なゲージ条件 χ^a について, ガウスの法則の第二次拘束条件は以下の拘束測度を導くことがわかっている.

$$\mathcal{D}^c\pi\,\mathcal{D}^cA = \mathcal{D}\pi\,\mathcal{D}A\,\delta(\chi)\,\delta(G)\,\det\{\chi, G\}\,. \tag{7.196}$$

ここで, デルタ関数は全てのアイソスピン添字と時空の点に関する積だ. 二つのアプローチが同等であるためには, それぞれの方法で導かれた行列式が同じでなければならない. それに加えて, 経路積分測度に対する第二次拘束条件はファデーエフ・ポポフ法には存在しないので無意味でなければならない. 第二次拘束条件 G^a がガウスの法則であることが重要だ. ネーターの定理によれば, G^a は非可換ゲージ変換の重要な生成子でなければならない. このゲージ変換の演算子は

$$\begin{aligned} U_\Lambda &= \exp\left\{ i\int d^3x\,\left[\pi_j^a(\partial_j\Lambda^a + gf_{bc}^aA_j^b\Lambda^c)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. -\ \pi_0^a(\dot{\Lambda}^a - gf_{bc}^aA_0^b\Lambda^c)\right]\right\} \end{aligned} \tag{7.197}$$

と書ける. これを部分積分して表面項を落とすと,

$$U_\Lambda = \exp\left\{ i\int d^3x\,\left[\Lambda^aG^a - \pi_0^a(\dot{\Lambda}^a - gf_{bc}^aA_0^b\Lambda^c)\right]\right\} \tag{7.198}$$

が得られる. ここで, 第一次拘束条件 π_0^a と第二次拘束条件 G^a がゲージ変換のユニタリー演算子に再び登場した. ゲージ固定項を除いて, 作用はユニタリー演算子 U_Λ によるゲージ変換で不変だ. しかし, ゲージ条件 $\delta(\chi)$ を選ぶことによってゲージ固定項はゼロになっている. これは最終結果が元の理論を再現するためには必要だ. 従って, ゲージ条件 $\delta(\chi)$ のようなゲージ変換で不変でない項は寄与しない.

表面的には第一次と第二次拘束条件が物理的部分空間で満たされていると，U_Λ がそこで単位演算子であり，理論がゲージ不変であることが保証されているように見える．この議論は (7.197) から (7.198) にいく際に落とした表面項が消えないときには成立しない．もしそうならば，ゲージ場の配位が多様体の境界で自明でない振舞いをするときは，U_Λ の (7.197) の形が単位演算子であるとはいえなくなる．また，表面項の問題を抜きにしても，(7.197) の形はゲージ変換を行うので，物理的な遷移振幅は不変でないといけないが，U_Λ は状態の位相を変えることはできる．これは，状態の位相が変わっても，フォック空間の全ての状態が同じ位相変換を起こせば遷移振幅は不変だからだ．このような状況については次節で詳しく論じる．

(7.196) にあらわれるポアッソン括弧を扱うには，ガウスの法則を逆に解く必要があるが，これは以下のように理解できる．ゲージ条件 χ_a がどのようなものであれ，G^a がゲージ変換を引き起こすことから，ポアッソン括弧は

$$\chi_b^\Lambda(y) = \int d^4x\, \Lambda^a(x)\{\chi_b(y), G^a(x)\} \tag{7.199}$$

を満たすことがわかる．ここで，χ_b^Λ は χ_b が**無限小**ゲージ変換を受けたものだ．これは Λ がいかに“大きな”ものでも成立する．一見したところ (7.199) には π_0 が無く，これはχ_b の空間部分，つまり，A_j を含む項のみについて正しいようにみえる．これは (7.198) にある π_0^a が (7.199) には無いからだ．しかし，ここでは完全なゲージ変換が以下の理由であらわれる．第一に，ポアッソン括弧は物理的部分空間で計算されていて，このため任意の π_0 の関数を G^a に付け加えることが可能だ．したがって，ゲージ共変なように $G^a \to G^a - gf_{bc}^a A_0^b \pi_0^c$ という置換えができる．第二に，定義 $G^a(x) = \dot{\pi}_0^a(x)$ と時空の積分がされることから，(7.199) を部分積分して，以下のように書き換えることができる．

$$\int d^4x\,\Lambda^a(x)\{\chi_b(y), G^a(x)\} =$$
$$-\int d^4x\,\Lambda^a(x)\{\chi_b(y), gf^a_{dc}A^d_0(x)\pi^c_0(x)\} - \int d^4x\,\dot{\Lambda}^a(x)\{\chi_b(y), \pi^a_0(x)\} =$$
$$-\int d^4x\,D^{ac}_0\Lambda^c(x)\{\chi_b(y), \pi^a_0(x)\}\ . \tag{7.200}$$

したがって, (7.199) の結果は A_0 成分についても正しい変換則を与える.

(7.199) によれば,

$$\left.\frac{\delta\chi^\Lambda_b}{\delta\Lambda^a}\right|_{\Lambda=0} = \{\chi_b, G^a\} = \frac{\delta G^a}{\delta A^b_0} \tag{7.201}$$

であることは自明だ. ここで, (7.201) の右辺は χ_b の定義からπ^b_0 を正準変換またはゲージ固定したものだ. (7.201) にあらわれる A^b_0 は χ_b に共役な変数だ.

量子化の二つのアプローチの等価性の証明の次のステップは, (7.201) の左辺がファデーエフ・ポポフ行列式の変数に正確に一致することを証明することだ. これには二つのアプローチの結果を直接比較する. ファインマンゲージでのヤン・ミルズ理論ではファデーエフ・ポポフ行列式はユークリッド空間で次のように与えられる.

$$\begin{aligned}
\Delta_\chi &= \det\left(\frac{\delta\chi^\Lambda}{\delta\Lambda}\right)\\
&= \det\left[\frac{\delta}{\delta\Lambda^b(y)}\left(-\partial_\mu A^{a\mu}(x) + \Box_E\Lambda^a(x) - gf^a_{de}A^{d\mu}(x)\partial_\mu\Lambda^e(x)\right)\right]\\
&= \det\left[\delta_{ab}\Box_E\delta^4(x-y) - gf^a_{cb}A^{c\mu}(x)\partial_\mu\delta^4(x-y)\right]\\
&= \det(\partial_\mu D^\mu)\ .
\end{aligned} \tag{7.202}$$

この結果はポアッソン括弧形式において物理的部分空間で $G^a = \dot{\pi}^a_0 - gg^a_{bc}A^b_0\pi^c_0 = D_0\pi_0$ と置換えをして得られる. これはまた, (7.190) からも得られる.

例題 7.23: ファインマンゲージでガウスの法則 G^a を計算して, (7.202) が以下に等しいことをしめせ.

$$\Delta_\chi = \det\left|\frac{\delta G^b}{\delta A_0^a}\right| = \det\{-\partial_\mu A^{a\mu}, G^b\}\ . \tag{7.203}$$

このため, ガウスの法則を逆解きして得られる行列式がファデーエフ・ポポフ行列式Δ_χ に等しい.

等価性の証明を完結するには, ガウスの法則の拘束条件 $\delta(G)$ が作用に,

$$\delta(G) = \int \mathcal{D}\Lambda \exp\left\{i\int d^4x\, \Lambda^a G^a\right\} \tag{7.204}$$

と吸収されることを使えばよい. この測度はゲージ変換にともなうリー代数のパラメータ空間全体の積分に相当する.

$$\mathcal{D}\Lambda = \prod_{x,a} d\Lambda^a(x)\ . \tag{7.205}$$

これは非可換な場合のゲージ空間の体積だ. これには非常に微妙な点がある. デルタ関数の積分形には積分が無限空間にわたってなされることが必要だ. しかし, いま考えている非可換群ではパラメータ空間は**コンパクト** (compact) になっていて, そのゲージ体積は有限だ. したがって, このようなコンパクトなゲージ多様体の測度は (7.205) と非常に異なっている.

群の多様体の上の測度は**ハール測度** (Haar measure) として知られている. これを群の要素 g に対して $d\mu(g)$ と書く. 群の要素 g がパラメータの組 Λ^a であらわされるとき, $d\mu(g)$ は適切な重みの関数を掛けた Λ_a の積分だ. 重み関数は, g' を群の他の要素とするとき, $d\mu(gg') = d\mu(g)$ となるように, つまりハール測度が群の演算のもとで不変であるように決められる. 群の多様体の体積は群の演算と矛盾が無いようなパラメータ変換に対して不変になっている. この性質は, 非可換ファデーエフ・ポポフ行列式がゲージ不変であることの証明に不可欠だ. SU(2) のハール測度については次節で詳細に調べる. しかし, ハール測度は群の多様体のコンパクト性のために (7.205) より複雑

なことは明らかだ．このため，ハール測度を使って拘束条件であるガウスの法則を A_0 を再定義して (7.204) で作用に吸収することが困難になる．したがって群がコンパクトなときには，この方法でガウスの法則を取扱うのを諦めるか，ハール測度の使用を諦めざるを得ないかに見える．このジレンマは次節でゲージ場とゲージ群のトポロジー的な局面を議論するときに解決する．そこでは SU(2) 不変なゲージ場理論を解析し，ガウスの法則を要求したときに基底状態を特徴づけるパラメータ θ を見出す．θ は究極的には SU(2) の群の多様体がコンパクトであり，そのために多様体の境界で自明でない場の配位ができることから来ている．

とりあえずこの問題を置いておいて，いま

$$\delta(G) = \int \mathcal{D}\mu(g)\ \exp\left\{ i \int d^4x\, \Lambda^a G^a \right\} \tag{7.206}$$

と書けるとする．ここで，$\mathcal{D}\mu(g)$ は時空の各点のハール測度の積だ．ハール測度をとれば，積分の数とガウスの法則の数とが一致していることは保証されている．Δ_χ のゲージ変換のもとでの不変性はハール測度の不変性とファデーエフ・ポポフの方法を使ってしめせる．ファデーエフ・ポポフの行列式は

$$\Delta_\chi^{-1} = \int \mathcal{D}\mu(g)\ \delta(\chi^\Lambda) \tag{7.207}$$

で与えられる．ここで，$\delta(\chi)$ は全ての時空上の点での全てのゲージ条件についてのデルタ関数の積を意味する．ゲージ変換のもとで，上式は，

$$\Delta_{\chi^\alpha}^{-1} = \int \mathcal{D}\mu(g)\ \delta(\chi^{(\alpha,\Lambda)}) \tag{7.208}$$

となる．ここで，(α, Λ) は α と Λ の要素の群の積 g' のパラメータ $\Lambda' = (\alpha, \Lambda)$ を意味する．ハール測度の不変性によって，

$$\Delta_{\chi^\alpha}^{-1} = \int \mathcal{D}\mu(g')\ \delta(\chi^{\Lambda'}) = \Delta_\chi^{-1} \tag{7.209}$$

という変換ができ，これによってファデーエフ・ポポフ行列式がゲージ不変であることがしめされた．

前と同じように, ファデーエフ・ポポフ行列式はその定義式で積分変数の変換を行って計算できる. 積分変数を群のパラメータから拘束条件に変えるのはそれらの数が一致することで可能になっている. 変数の変化にはヤコビアンがともなうが, それは次の形を持つとする.

$$d\mu(g)\,\delta(\chi^g) = d\chi^\Lambda\ \det\left|\frac{\delta\Lambda}{\delta\chi^\Lambda}\right|\,\delta(\chi^\Lambda)\,. \tag{7.210}$$

これは, ハール測度の実際の形を使ってチェックしなければならない. しかし, もしこれが正しいとすると, QED のファデーエフ・ポポフ行列式の非可換な場合への拡張が

$$\Delta_\chi = \det\left|\frac{\delta\chi^\Lambda}{\delta\Lambda}\right| \tag{7.211}$$

と求まり, (7.201) と一致する.

QED のときと同様に (7.204) の指数にあらわれる被積分関数 $\Lambda^a G^a$ を作用に加え, 各点でのハール測度は経路積分の測度に加える. (7.193) の G^a の形と (7.190) を (7.191) に代入して得られる作用を比較すると, 積分変数を $A_0^a \to A_0^a - \Lambda^a$ と変換すれば, QED のときと同じく $\Lambda^a G^a$ の形の項が全て取り除けることがわかる. しかし, A_0^a を Λ だけ変化させると, ゲージ条件のデルタ関数が,

$$\delta(\chi^a) \to \delta(\chi^a + \dot{\Lambda}^a) \tag{7.212}$$

と変化する. また, 作用の $\pi_0^a \dot{A}_0^a$ 項も,

$$\pi_0^a \dot{A}_0^a \to \pi_0^a \dot{A}_0^a - \pi_0^a \dot{\Lambda}^a \tag{7.213}$$

となる. 行列式 Δ_χ はゲージ変換のもとで不変なので, Δ_χ はこの変換のもとでも不変だ. Λ はゲージ変換で除けることが簡単にわかる. 全ての正準運動量を積分して, その結果経路積分の指数にあらわれる作用はπ_0 の積分からでる変換されたゲージ固定項を除いて明白にゲージ不変となる.

経路積分にあらわれる作用は, ゲージ固定項 (7.188) を除いてはもとの作用に等しい. しかし, ゲージ固定項は以下の形をしている.

$$\mathcal{L}_\chi = \mathcal{L} - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^{a\mu} - \dot{\Lambda}^a)^2\,. \tag{7.214}$$

ゲージ場が n 個あるときは, ゲージ場の経路積分測度は以下で与えられる.

$$\mathcal{D}A = \prod_x \prod_{a=1}^{n} \prod_{\mu=0}^{3} dA_\mu^a(x) \ . \tag{7.215}$$

例題 7.24: ゲージ場の測度 (7.215) とスピノル場の測度が明白にゲージ不変であることをしめせ.

ゲージ条件とゲージ固定項にある $\dot{\Lambda}$ は場のゲージ変換で以下のように取り除くことができる.

$$\partial_\mu A^{a\mu} - \dot{\Lambda}^a \ \rightarrow \ \partial_\mu A^{a\mu} - \partial^\mu D_\mu^{ab} \Gamma^b - \dot{\Lambda}^a = \partial_\mu A^{a\mu} \ . \tag{7.216}$$

ここで, Γ は $\partial_\mu D^\mu \Gamma = -\dot{\Lambda}$ を満たすように選ぶ. 行列式 Δ_χ はこのゲージ変換のもとで不変だ. (7.216) には, 微小ゲージ変換を任意の大きさの $\dot{\Lambda}$ を取り除くのに使っているという問題がある. 有限の $\mathbf{U}$ を使ってのゲージ変換で, 大きな $\dot{\Lambda}$ を取り除くための微分方程式を解くことは非常に難しいことだが, ここではそれは証明無しに仮定しておく. 経路積分は最終的に,

$$_+\langle 0 | 0 \rangle_- = \int \mathcal{D}\mu(g) \int_0^0 \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\psi\, \delta(\chi)\, \Delta_\chi \, \exp\left\{ i \int d^4x\, \mathcal{L}_\chi \right\} \tag{7.217}$$

となる. ここでの $\mathcal{L}_\chi$ は (7.188) のゲージ固定された作用になる. また, ここでは以前と同じようにゲージ体積は因子として前に出されて, その名残としてゲージ条件とファデーエフ・ポポフ行列式Δ_χ がある.

QED の場合と同様にファデーエフ・ポポフ行列式はゲージ場と同じ数だけのファデーエフ・ポポフゴースト $\bar{c}^a$ と c^a を使って指数化して作用に取り込むことができる. そのユークリッド空間での結果をミンコフスキー空間に接続して, 以下を得る.

$$\begin{aligned} \Delta_\chi \ &= \ \int \mathcal{D}\bar{c}\, \mathcal{D}c \, \exp\left\{ \int d^4x\, \bar{c}^a (\delta_{ab} \Box_E - g f_{ab}^c\, A^{c\mu}\, \partial_\mu) c^b \right\} \\ &\overset{M}{\rightarrow} \ \int \mathcal{D}\bar{c}\, \mathcal{D}c \, \exp\left\{ -i \int d^4x\, \partial^\mu \bar{c}^a\, D_\mu^{ab} c^b \right\} \ . \end{aligned} \tag{7.218}$$

ここで部分積分の表面項を落とすためにゲージ条件を使った. したがって, 非可換ゲージ理論のファインマンゲージではこのゴーストの作用は結局,

$$\mathcal{L}_g = -\partial_\mu \bar{c}\, D^\mu c = -\partial_\mu \bar{c}^a\, \partial^\mu c^a + g f^a_{bc}\, \partial_\mu \bar{c}^a A^{b\mu}\, c^c \tag{7.219}$$

となる.

> **例題 7.25**: テンポラルゲージ, $A_0^a = 0$, ではファデーエフ・ポポフゴーストは無いことをしめせ.

このファインマンゲージでの非可換ゲージ理論では, ゴーストは自由ではなく, ゲージ場と相互作用をする. これは, ファインマンゲージではゲージ場にともなうゼロノルム状態が保存カレントに結合せず, ナイーブな S行列とは可換でないことによる. ファデーエフ・ポポフ行列式は $\bar{\pi}_0$ を消すために出てきて, それによりユニタリーティを保証する. これはゲージ場の非線形項にあるゼロノルム状態の真空遷移要素への寄与を消すメカニズムが必要だ. この証明はここではしないが,

$$\begin{aligned} {}_+\langle 0 \,|\, 0 \rangle_- \quad &= \quad \int_0^0 \mathcal{D}\mu(g)\, \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{c}\, \mathcal{D}c\, \delta(\chi) \\ &\quad \times \exp\left\{ i \int d^4x\, \left[\mathcal{L}_\chi(A, \psi) + \mathcal{L}_g(\bar{c}, c, A)\right] \right\} \end{aligned} \tag{7.220}$$

はユニタリーであり, これを解析の出発点とできる. 8 章で定義する摂動計算と BRST 不変性 [7] に基づいた議論から (7.220) が実際にユニタリーだと証明できる. 歴史的には, ファデーエフ・ポポフゴーストは最初にファインマンによって, 量子重力でユニタリーティ問題を解くために, 理論に天下り的に導入された [20].

(7.220) であらわされる真空遷移確率は**量子色力学** (quantum chromodynamics) または QCD と呼ばれるゲージ理論に適用できる [21]. この理論のゲージ群は SU(3) であり, **グルーオン** (gluon) と呼ばれる 8 つのゲージ場を持つ. 物質場としては SU(3) の基本表現である**クォーク** (quark) というスピノル場がある. このクォークにつく 3 つの値を取り得る内部対称性をあらわ

す添字を**カラー**という [22]. クォークは, フレーバーの添字も持つが, どのフレーバーのクォークもグルーオンと全く同じ相互作用をする.

クォークはスピン 1/2 の粒子で, このために, クォークと反クォークの s 波の束縛状態はスピン 0 か 1 を持つ. また, 3 つのクォークの束縛状態はスピン 1/2 か 3/2 になる. QCD は, 実験的に観測されている, 強い相互作用をする粒子, **ハドロン** (hadron) を, 2 つか 3 つのクォークか反クォークの束縛状態として説明することを目標とする. この本ではその理由には立ち入らないが [23], それぞれのクォークは, 電荷 $\frac{2}{3}e$ か $-\frac{1}{3}e$ を持つ. この特異な電荷は全く実験では観測されておらず, クォークは他のクォークとの束縛状態でのみ存在すると広く考えられている. この現象は, **閉じ込め** (confinement) と呼ばれている [24]. グルーオンも作用の非線形項のために, 光子とは非常に異なる振舞いをすると考えられている. QCD の経路積分を使って演繹的にこの現象を説明することにはほとんど成功していない. しかし, 洗練されたアルゴリズムを高速コンピュータ上で用いることによって, ユークリッド空間での格子上の QCD の経路積分の数値解析が推し進められてきた [25]. この方法では, この理論が実験的にわかっているハドロンの質量スペクトラムを再現するということの強力な証拠が得られている. しかし, QCD の摂動理論が役に立つ場合もあり, これを 8 章で述べる.

7.6 ゲージ場のトポロジー的性質

この章ではゲージ場と多様体のトポロジーの関係について簡単に述べる. 数学者は, 多様体の局所的構造と大域的構造の関係を理解するために, ヤン・ミルズ場と同じ構成法を長い間使ってきた. これはつまり, ヤン・ミルズ場が豊かな幾何学的解釈をもち, それがゲージ理論の意味についての深い洞察に導くことを意味している.

出発点は微分幾何学で使われる**微分形式** (differential form) とその**ウェッジ積** (wedge product) だ. 視覚的に考えれるように, これを 3 次元空間で説

明するが, これは必ずしも簡単な $\mathbf{R}^3$ である必要はない. この空間内の経路を考えると, 経路上のある点での微小な向きを持つ線要素は, その点での dx^i のある線形結合であらわされる. 向き付けされた 2 次元面を考えれば, 面要素 dS^i が考えられるが, これは線素 dx^i のウェッジ積, $dx^i \wedge dx^j$ を使って面要素に向き付けをすることができる. ウェッジ積はその変数について反対称で, $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ となっている. 特に, dS^i とウェッジ積の関係は $dS^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}dx^j \wedge dx^k$ か $dx^i \wedge dx^j = \varepsilon^{ijk}dS^k$ で与えられる. 次に高い次数の積は, ウェッジ積 $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ であり, これは向き付けされた面要素と向き付けされた線要素の反対称積であり, これは $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \varepsilon^{ijk}d^3x$ で与えられる向き付けされた体積要素である. 3 次元ではこれより高い次数のウェッジ積は反対称性のためにゼロとなる.

続けて 3 次元で考えて, 微分形式を次のように定義する. **0 形式** (zero-form) は多様体のどの点でも定義され, 微分可能な関数 $\varphi(x)$ だ. **1 形式** (one-form) A はベクトル場 $A = A_i(x)dx^i$ で向き付けされた線要素として理解される. **2 形式** (two-form) F は向き付けされた面要素を通る流れ $F = F_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^k$ として視覚化できる. **3 形式** (three-form) B は体積密度, $B = B_{ijk}(x)\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ だ. 3 次元ではこれで全ての形式が尽きる. φ, A_i, F_{ij}, および B_{ijk} は形式の**成分** (components) であり, 多様体上で微分可能な関数とする. 形式の定義にあらわれるウェッジ積の反対称性より, 形式の成分はそのどの添字についても完全反対称である. ここで考える場合では, 成分が dx^i の回転の逆変換を受けるとして, 形式の定義が回転不変になる. したがって, 形式の定義は特定の座標系によらない.

外微分 (exterior derivative) d は n 形式から $n+1$ 形式を作る. いま, T を n 形式として, $T = T_{j\cdots k}(x)\, dx^j \wedge \cdots \wedge dx^k$ と書く. ここで, ウェッジ積には n 個の線要素があり n 個の添字がある. T の外微分は,

$$dT = \frac{\partial T_{j\cdots k}}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dx^k \tag{7.221}$$

と定義する. ウェッジ積が反対称であるので, 微分の反対称部分のみが残る.

したがって, この方法で導かれた $(n+1)$ 形式の要素は, 反対称だ. 以下は, これからすぐに導ける全ての形式について成立する重要な結果である.

$$d^2T = 0\ . \tag{7.222}$$

例題 7.26: (7.222) をしめせ. .

ゲージ理論には数多くの微分形式が登場する. いまの 3 次元の場合では電場と磁場が外微分で関係している. スカラーポテンシャル φ は 0 形式のよい例だ. その外微分は 1 形式で,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,dx^i = -\left(E_i + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)dx^i \tag{7.223}$$

である. ここで, 電場 $\mathbf{E}$ とスカラーポテンシャル, ベクトルポテンシャルの関係を使った. 2 階の外微分は,

$$d^2\varphi = -\frac{\partial(E_i + \dot{A}_i)}{\partial x^j}\,dx^j \wedge dx^i = \left(\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{7.224}$$

となる. ここでは, マックスウェルの方程式の内の一つ, ファラディの法則と, 向き付けされた面要素とウェッジ積の関係を使った. 同様に, ベクトルポテンシャルは 1 形式, $A = A_i dx^i$ を定義し, その外微分は, 以下で与えられる.

$$dA = \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\,dx^j \wedge dx^i = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{jik}\frac{\partial A_i}{\partial x^j}\,dS^k = -\tfrac{1}{2}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}\ . \tag{7.225}$$

したがって,

$$d^2A = -\nabla\cdot\mathbf{B}\,d^3x = 0 \tag{7.226}$$

となる.

微分形式は, ストークスの定理の一般化にも登場する. $\mathcal{M}$ を n 次元の多様体 とし, $(n-1)$ 形式を A とすれば, 定理は次のように書かれる.

$$\int_{\mathcal{M}} dA = \int_{\partial\mathcal{M}} A\ . \tag{7.227}$$

ここで, $\partial\mathcal{M}$ は多様体 $\mathcal{M}$ の境界である. 多様体のトポロジー的な構造の一部はその境界で特徴づけられる. たとえば, 円盤と円筒は境界を持つ 2 次元面だが, 球面とトーラスは境界を持たない 2 次元面だ.

ストークスの定理の初等的な証明は, 通常表面をつながった 3 角形に分割することから始まる. この 3 角分割をより複雑な面や体積に一般化したものは**ホモロジー** (homology) 理論として知られている. 明らかに, 一般的な表面の 3 角分割はその次元 p, 境界, と大域的なトポロジー的な形に依存している. 多様体を覆うために必要な一般化された p 次元の 3 角形 (p 単体) と, その低次元の辺, 側面, そしてこれらの 3 角形の頂点は**単体複体** (simplicial complex) と呼ばれている. 多様体を覆うのに必要な単体複体の要素と, その低次元の要素を**ホモロジー類** (homology class) に分類することが可能だ. この分類は, 単体複体の中に, 多様体の境界の一部となっているために境界を持たないものや, 他の単体複体の要素の境界になっているためにそれ自身の境界を持たないものがあることによる. ストークスの定理は, 微分形式とそれが定義されている多様体の深い関係を意味していて, ホモロジー類とむすびついている. このような関係は**ド・ラムのコホモロジー理論** (de Rham cohomology theory) にまとめられている. 境界の境界は存在しないが, これは外微分で d^2 が消えるのと似ていて, このために境界演算子が外微分と非常によく似ていることから, この関係が生じている.

この関係はこの本ではとても完全には紹介しきれないが, 概略を述べておこう [27]. 多様体, $\mathcal{M}$ で, $d\omega = 0$ を満たす p 形式 ω の集合, $Z^p(\mathcal{M})$ を考える. これらの形式は**閉じている** (closed) という. 閉じた p 形式のうちのいくつかは, ある $(p-1)$ 形式 η を使って, $\omega = d\eta$ と書けるので閉じている. このように, $\omega = d\eta$ と書ける閉じた形式を**完全** (exact) であるといい, すべての完全な p 形式の集合を $B^p(\mathcal{M})$ と書く. 全ての閉じた p 形式のコホモロジー類は差が完全な形式になっているものを同値類として定義する. 言い換えれば, ω と ω' は, もし, $\omega - \omega' = d\eta$ と書ければ$\omega \sim \omega'$, つまり, 同じ同値類に属する. 閉じた p 形式の一般類は商空間 $H^p(\mathcal{M}) = Z^p(\mathcal{M})/B^p(\mathcal{M})$ である.

ストークスの定理はこれらの類が p 次元の単体複体のホモロジー類と双対関係にあることをしめしている. したがって, ホモロジー類の構造から, 多様体の閉形式のコホモロジー構造が明らかになる.

このことは, ゲージ理論に直接に関係している. これを以下の例で見てみよう. 前と同じように, 3 次元に話を限って, ベクトルポテンシャルに伴う 1 形式 A を考える. A と A' という 2 つの 1 形式はもしその差が 0 形式の外微分, $d\Lambda = \partial_i \Lambda\, dx^i$, になっていれば同値である. これは, ゲージ変換で移り変わる全てのベクトルポテンシャルは同じ同値類に属することを意味している. 1 形式のベクトルポテンシャルが与えられれば, 磁場は dA と求められる. したがって, 多様体のどこでも $\mathbf{B} = 0$ であれば, そのベクトルポテンシャルの同値類は第一コホモロジー群 $H^1(\mathcal{M})$ によって与えられる一般トポロジー類に属する.

磁場は, 2 形式 $B = F_{jk}\, dx^j \wedge dx^k$ となっている. 一般に磁場は, 1 形式でありどこでも微分可能なベクトルポテンシャルから導かれる. この微分可能条件を緩めると, いくつかの点で, $dB \neq 0$ であるような特異関数を見つけることができる. このような場合は, 磁気単極子がある場合に相当する. ここでは, 磁気単極子のベクトルポテンシャルの正確な形は重要ではない. 代わりに, $dB \neq 0$ である点を多様体から除いて, 多様体の残りの部分で, $dB = 0$ が成立するようにすることを考える. 原点に磁荷が g の点状の単極子があって, 磁場が

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 4\pi g\, \delta^3(\mathbf{x}) \tag{7.228}$$

を満たすとき, これは $\mathbf{R}^3$ で原点 $\mathbf{x} = 0$ を除外することに相当する. 残りの多様体は, 球 S_2 にホモトピー的に同等であることをしめせる. したがって, (7.228) を満たす 2 形式 B の同値類は S_2 上の閉 2 形式の同値類と同じで, 第 2 コホモロジー類 $H^2(S_2)$ で与えられる. $H^2(S_2)$ は整数と 1 対 1 に対応するが, これが磁気単極子に対して量子化条件が課されることを指し示している. すぐ後に, この整数がディラックの量子化条件から来ることを見る.

作用の部分積分においても, 境界は重要な役割を果たす. いままで, 場の配

位は無限遠で充分早く落ちるとして, 表面項を落してきた. しかし, もし磁気単極子があれば, これは正しくない. QED のゲージ場についてもっとも重要な部分積分に$\pi_j \partial_j A_0$ を含むものがある. ガウスの法則の拘束条件を使うために部分積分を施すときには, 以下の表面項があらわれた.

$$\int dt \int d^3x\, \nabla\cdot(\pi A_0) = \int dt \oint d\mathbf{S}\cdot \pi A_0\,. \tag{7.229}$$

ここで, 表面は無限遠にあるとした. 古典的な正準運動量 π_j は明らかに磁場 B_j だ. 一つだけ静的な電荷と一つだけ静的な磁荷のみがあるときには, 古典的な場の配位は以下で与えられる.

$$A_0 = \frac{e}{r}\,,\ \ \pi = \mathbf{B} = \frac{g}{r^2}\,\hat{r}\,. \tag{7.230}$$

そして, (7.229) の積分は

$$\int dt \oint d\mathbf{S}\cdot \mathbf{B}A_0 = \frac{4\pi eg}{R}\int dt \tag{7.231}$$

となる. ここで, R は表面の半径だ. $\int dt = R$ と保ったまま $R \to \infty$ とすると, 二つの項は打ち消し合う. その結果,

$$\int dt \oint d\mathbf{S}\cdot \mathbf{B}A_0 = 4\pi eg \tag{7.232}$$

となる. $\int dt = R$ という制限は多様体の境界を 3 次元球として定義するのと同等だ. 3 次元球の定義とそれがなぜ多様体の境界になっているかはすぐ先で説明する. しかし, 正確な定義が無くても, ゲージ条件を使って (7.229) を明白に共変に

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x\, \partial_\mu(\pi^\mu A_0) = \int_{\partial\mathcal{M}} dS^\mu\, \pi_\mu A_0 \tag{7.233}$$

と書ける. ここで, 積分はもとの体積を囲む表面についてである. この結果では, 境界をとるときに空間と時間の成分を同じように扱うので, $\int dt = R$ の制限が自然となる.

古典解の役割は 9 章で論じるが, いまのところ, このような項が経路積分にどのように関係しているかは自明でない. in 状態と out 状態に静的な電荷

と静的な磁荷が共存しているときには, 経路積分に上のような項の指数関数が登場する. これは, 6.8 節で述べた一般的な経路積分の境界条件の議論からわかる. 部分積分を実行すると, 全体の位相因子,

$$\exp(iS) \to \exp(i4\pi eg)\exp\left(iS'\right) \tag{7.234}$$

が得られる. この位相因子は, 任意の整数 n を使って, $eg = \frac{1}{2}n$ が成立していれば 1 となって, まったく問題とならない. この整数はコホモロジーの議論からあらわれるもので, これはディラックの量子化条件である [28].

運動方程式の解で, 表面項が無視できないような他の場の配位を考えることは自然だ. この可能性を探るために, 微分形式の概念をユークリッド空間に拡張する. ユークリッド空間は, 少なくとも局所的には $\mathbf{R}^4$ に同値だ. このために 1 形式の可換ゲージ場 $A = A_\mu dx^\mu$ を導入できる. また, これから, 2 形式の $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$ も外微分 $F = dA$ で導ける. 明らかに, このようにして得られた $F_{\mu\nu}$ はユークリッド QED 作用にあらわれる $F_{\mu\nu}$ と一致している. これより, $dF = d^2A = 0$ であり, 電荷に関係が無く, 純粋に微分形式の**幾何学的**局面にのみ関係したマックスウェルの 2 つの方程式が再現される. 重力理論でも, 純粋に幾何学的な恒等式でしかない運動方程式が同様に存在する. それらは**ビアンキ恒等式** (Bianchi identities) と呼ばれる [29]. ヤン・ミルズ場 $F_{\mu\nu}$ は外微分では導けない. その代りに, 場の行列表示を用いると, 1 形式の行列 $A = A_\mu dx^\mu = A_\mu^a T^a dx^\mu$ が 2 形式 $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ と,

$$F = dA + ig\, A \wedge A \tag{7.235}$$

のように関係している. (7.235) の関係は外微分のゲージ共変版と見ることができる.

QED のラグランジアンは $F \wedge F$ では**ない**. 4 次元での定義

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, d^4x \tag{7.236}$$

を使うと,

$$F \wedge F = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\, d^4x \tag{7.237}$$

をしめせる. テンソル $^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ は $F_{\mu\nu}$ に**双対** (dual) であるという. QED では, 双対テンソルは F の定義で単に $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を入れ換えて得られる. ユークリッド空間での恒等式, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = 2[\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}]$, を使って, $^{**}F = F$ がしめせる.

例題 7.27: QED のラグランジアンは $^*F \wedge F$ に比例することをしめせ.

作用に $F \wedge F$ に比例する項をいれることは自然だ. $^*F$ の定義と $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ が非固有ローレンツ変換のもとで符合を変えることから, そのような項は**擬スカラー** (pseudoscalar) となる. したがって, この項はパリティを破る. この項が作用にどのように寄与するかをみるために, まず, それが全微分で書かれることに注意する. これは一般的な非可換ゲージ理論で成立する. その証明の手始めとして, まず, 4 次の項をみると, トレースの性質のために,

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,(A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,(A_\sigma A_\mu A_\nu A_\rho)\\&= \varepsilon^{\nu\rho\sigma\mu}\mathrm{Tr}\,(A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma) = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,(A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma)\end{aligned} \tag{7.238}$$

となって消えることがわかる. このトレースの巡回性を使うと, 恒等式,

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\,(A_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma) = \frac{1}{3}\partial_\rho\left[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,(A_\mu A_\nu A_\sigma)\right] \tag{7.239}$$

が得られる. また, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\partial_\rho A_\sigma = 0$ より,

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,(\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma) = \partial_\rho[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,(\partial_\mu A_\nu A_\sigma)] \tag{7.240}$$

となる. これらの結果と (7.173) の定義を使うと, 以下の結果が得られる.

$$\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) = \partial_\rho\left\{\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\mathrm{Tr}\,\left[A_\sigma\partial_\mu A_\nu + \frac{2}{3}ig\,A_\sigma A_\mu A_\nu\right]\right\}\,. \tag{7.241}$$

(7.241) の右辺はある 3 形式 K の成分になっている. この 3 形式は式,

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}\,{}^*F^{\mu\nu}) = dK \tag{7.242}$$

を満たし,

$$K = \mathrm{Tr}\left(A_\sigma \partial_\mu A_\nu + \tfrac{2}{3} i g A_\sigma A_\mu A_\nu\right) dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{7.243}$$

と与えられる. K は **チャーン・サイモン形式** (Chern–Simons form) [27] と呼ばれている. 3 次元多様体でこれを作用とする理論は多くの特異な性質を持つことが知られている [30]. ストークスの定理より,

$$\int_{\mathcal{M}} \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(F\, {}^*F\right) = \int_{\partial \mathcal{M}} K \tag{7.244}$$

が成立する. したがって, この項は場の配位の多様体の境界での振舞いのみによって決まる. 行列表示で外微分を使って, チャーン・サイモン形式は次のように書ける.

$$K = \mathrm{Tr}\left(A dA + \tfrac{2}{3} i g A \wedge A \wedge A\right) . \tag{7.245}$$

$F \wedge F$ の項は多様体の境界からの寄与しかないので, その項は作用から取り除いてもよいように思える. 実際, いままではそのような表面項は何の寄与もしないとして捨ててきた. しかし, 非可換ゲージ理論では, この点は注意深く調べなければならない.

ゲージ理論での経路積分と行列式の計算はユークリッド空間で行なうので, 出発点の多様体 $\mathcal{M}$ は $\mathbf{R}^4$ だ. この $\mathbf{R}^4$ の境界は 3 次元球面 S_3である. これは $\mathbf{R}^2$ の境界が円周 S_1 で $\mathbf{R}^3$ の境界が球面 S_2 になっていることから容易に想像できよう. 3 次元球面は $\mathbf{R}^3$ の無限遠の点をすべて**同一視**つまり, 同じ点として得られる. これも S_1 が $\mathbf{R}^1$ の無限遠を同一視して得られ, S_2 が $\mathbf{R}^2$ の無限遠を同一視して得られるのと同じである. チャーン・サイモン形式はしたがって, S_3 上で計算することになる. S_3 上の点は 3 つの角度で指定される. これも, $S_1 \to S_2 \to S_3$ と考えていけばわかる. S_n を張る角度積分は一般的に

$$d\Omega_n = d\phi \, \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, \sin^2\theta_2 \, d\theta_2 \cdots \sin^{n-1}\theta_{n-1} \, d\theta_{n-1} \tag{7.246}$$

で与えられる. ここで積分範囲は, ϕ については 0 から 2π で, 他の全ての角度については0 から π である.

例題 7.28: S_3 の半径が R のとき, S_3 の体積は $2\pi^2 R^3$ であることをしめせ.

チャーン・サイモン形式は最初に微分位相幾何学に登場した [27]. これは, ゲージ群と多様体のトポロジー的な構造に深い関係がある. これを例でしめすために, 物質場との結合が無いときのゲージ場の運動方程式の非常に簡単な解を考えよう. これは**純ゲージ** (pure gauge) 配位と呼ばれ, 行列表示で, 次の形をとる.

$$A_\mu = \frac{1}{ig}(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}\ . \tag{7.247}$$

ここで, $\mathbf{U}$ はゲージ群の任意の要素である.

例題 7.29: (7.247) がゲージ固定条件がないときの A_μ の運動方程式を満たすことを確かめよ.

ユークリッド領域での運動方程式の解は一般的に**インスタントン** (instantons) と呼ばれる. この名前はこれらのゲージ場の配位が空間的にも時間的にも局所的だということによる. しかし, インスタントンという言葉はより広く, どの理論のどんなユークリッド解にも使われることが多い.

例題 7.30: (7.247) を (7.245) に使って, 純ゲージのときには,

$$K = -\tfrac{1}{3}ig\int_{S_3} \mathrm{Tr}\,(A \wedge A \wedge A) \tag{7.248}$$

となることをしめせ.

純ゲージ配位では, (7.248) は

$$K = \frac{1}{3g^2}\int_{S_3} dS_\mu\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu \mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}(\partial_\rho \mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}(\partial_\sigma \mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}\right] \tag{7.249}$$

となる. この例をよりよく調べるために, いまゲージ群が SU(2) のときを考える. ユークリッド領域では, (7.249) に面白い結果を与えるような座標の関

数 $\mathbf{U}$ を構成できる [31]. これは, 任意の整数 n を使って, 以下の形,

$$\mathbf{U}_n = r^{-n}(x_0 \mathbf{1} + i x_j \sigma_j)^n\,, \quad r^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{7.250}$$

で与えられる. $\mathbf{U}_n^\dagger \mathbf{U}_n = \mathbf{1}$ と $\det \mathbf{U}_n = 1$ が満たされているから, $\mathbf{U}$ は SU(2) ゲージ群の要素だ.

> **例題 7.31**: 純ゲージ解 (7.247) の A_μ^a を計算し, それがユークリッド形式でのローレンツ条件を満たすことをしめせ.

ユークリッド空間の境界で, $r \to \infty$ の極限では, $\mathbf{U}_n$ のチャーン・サイモン形式の値は(7.250) を (7.249) に代入して得られる. この計算は, ユークリッドの面要素が $dS^\mu = d\Omega\, r^2\, x^\mu$ と書かれ, 全立体角が $\int d\Omega = 2\pi^2$ で与えられることを使うと簡単になる. $r \to \infty$ の極限では, (7.249) の積分は,

$$K_n = \frac{1}{3g^2}\int dS^\mu\, K_\mu = \frac{1}{3g^2}\int dS_\mu\, \frac{12 n x^\mu}{r^4} \tag{7.251}$$

となり,

$$K_n = \frac{8\pi^2}{g^2}\, n \tag{7.252}$$

が得られる.

> **例題 7.32**: (7.251) と (7.252) を確かめよ.

いま考えている純ゲージ解の場合は, K と $F \wedge F$ 関係から,

$$\frac{g^2}{16\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu}) = n \tag{7.253}$$

がわかる. この積分が整数になり, これは, 解の**ポントリャーギン指数** (Pontryagin index) として知られるトポロジー的な性質をあらわす量である. この指数は 3.4 節ではじめて述べたホモトピーの議論を拡張しても予言できる. SU(2) のパラメータは三つのオイラー角, ξ_1, ξ_2, ξ_3 であり, したがって, SU(2) のパラメータの多様体は S_3 と同じである. したがって, トポロジー的

には, SU(2) は S_3 と同値である, つまり, SU(2) $\sim S_3$. SU(2) の純ゲージ配位では, ポントリャーギン数は, SU(2) の S_3 のパラメータを, ユークリッド空間の境界であり, またチャーン・サイモン形式の積分領域をなす S_3 多様体へ写像する仕方と関係している. この写像は, ホモトピー群 $\pi_3(S_3)$ で特徴づけられ, これは整数と 1 対 1 に対応する. この整数は写像の巻き数, つまり, 純ゲージ解が S_3 を何回巻いたかをあらわす. この巻き数はポントリャーギン数から得られる整数と同じだ. 非可換ゲージ場の理論の純ゲージ配位は大きな r でこのように QED とは非常に異なることができる.

SU(2) のハール測度がこれで見つかる [32]. これにより, これまでに得た結果が整理されて, 新たな非可換基底状態の性質がわかる. ハール測度は,

$$d\mu(g) = W(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \tag{7.254}$$

という形をとらなければならない. これがハール測度になるために, 関数 W を群の再パラメータ化で不変なように選ぶ. これは以下のように行なう. いま, SU(2) の任意の要素 $\tilde{g}$ について, $\tilde{g}g$ の積がSU(2) の他の要素, g' を与えなければならない. パラメータの集合, (ξ_1, ξ_2, ξ_3) が群の要素 g を与え, (ξ_1', ξ_2', ξ_3') が要素 g' に対応するなら, 関数 W は

$$W(\xi_1', \xi_2', \xi_3')\, d\xi_1'\, d\xi_2'\, d\xi_3' = W(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \tag{7.255}$$

が満たされるように選ばれなければならない. SU(2) では,

$$W(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varepsilon_{ijk} \mathrm{Tr} \left[g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \right] \tag{7.256}$$

と選ぶ. この形の W が今まさに欲しいものだということをしめすために群の演算を計算する. もし, $\tilde{g}g = g'$ であれば, $g = \tilde{g}^{-1}g'$ で $g^{-1} = (g')^{-1}\tilde{g}$ である. これらを (7.256) に代入して, 連鎖微分則を用いると,

$$W(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \xi_l'}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_m'}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_p'}{\partial \xi_k} \mathrm{Tr} \left[g'^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi_l'} g'^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi_m'} g'^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi_p'} \right] \tag{7.257}$$

を得る. ここで,

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \xi_l'}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_m'}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_p'}{\partial \xi_k} = \varepsilon_{lmp} \det \left| \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \right| \tag{7.258}$$

であるから, 変数変換のヤコビアンの逆数が現れた. これが, 測度の他の部分から出るヤコビアン,

$$d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = \det \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi'} \right| d\xi_1'\, d\xi_2'\, d\xi_3' \tag{7.259}$$

を打ち消す. ハール測度の単位元のまわりでの振舞いを調べれば, ファデーエフ・ポポフ行列式を計算するのに用いた変数変換を確認することができる.

> **例題 7.33**: SU(2) のハール測度にあらわれる W の定義の中の g の微小形を使って, 単位元の近くで, $W \approx 1$ をしめせ.

SU(2) のハール測度は (7.249) と一致することがしめせる. いま $t =$ 一定の S_3 を考える. このときには $\mu = 0$ として, $\varepsilon_{0\nu\rho\sigma} \to \varepsilon_{ijk}$ を使う. 体積要素は S_3 の立体角 Ω を使って, $dS^0 = R^3 d\Omega$ と書ける. 最後に, 微分を無次元のオイラー角 $x_i = R\xi_i$ を使って書く. チャーン・サイモン形式の S_3 上での積分はSU(2) 群の体積と一致することがわかる. これで, チャーン・サイモン形式はこの S_3 上で積分すると, 状態のトポロジー的電荷 Q_T が得られる. この節で考えた純ゲージ配位では, 電荷 Q_T は量子化されていた. 簡単に $[H, Q_T] = 0$ がしめせて, ハミルトニアンと Q_T には同時固有状態が存在することがわかる.

$F \wedge F$ が全微分であるにもかかわらず, SU(2) ゲージ理論のもっとも簡単な解の性質から, これの作用への寄与を単に落してしまうことができないことがわかった. 実際, すぐに見るように, SU(2) の純ゲージ配位が巻き数 n を持つせいで, 経路積分の測度が互いに素なトポロジー的セクターに分けられることがわかる. これは 3.4 節で論じた単純な量子力学的モデルの場合と同様に, 非可換ゲージ群の真空に周期的構造をもたらす. さらに, SU(2) 群の多様体がコンパクトであることによるガウスの法則の困難も解決しなければならない. SU(2) では (7.206) は明らかに成り立たないのである.

この周期的構造があることをしめすために, 真空のゲージ不変性の意味を調べてみよう. ガウスの法則を課すことは, ゲージ不変性を課すことと同等で

あるから, 両方の問題を同時に解決できるかもしれない. トポロジー的に自明でない解として純ゲージ解をとったので, ゲージ変換の生成子 (7.197) (これを $\mathbf{G}_\Lambda$ と書く) をつかって, ゲージ場を純ゲージ解 $\mathbf{U}_n$ だけ変換することができる. 演算子記法を使って, これは

$$(\mathbf{G}_{\Lambda_n})^{-1} A_\mu \mathbf{G}_{\Lambda_n} = (\mathbf{U}_n)^{-1} A_\mu \mathbf{U}_n + \frac{1}{ig}\partial_\mu (\mathbf{U}_n)^{-1}\mathbf{U}_n \tag{7.260}$$

と書ける. ここで, Λ_n は巻き数が n の純ゲージ解 $A_\mu = (ig)^{-1}\partial_\mu(\mathbf{U}_n)^{-1}\mathbf{U}_n$ のゲージ関数だ. 規格化された状態 $|0\rangle$ は巻き数 0 の真空をあらわすことにすると, $\langle 0| Q_T |0\rangle = 0$ である. また, ハミルトニアン H のゼロ点エネルギーは $\langle 0| H |0\rangle = 0$ とする. (7.260) を使うと,

$$\langle 0| (\mathbf{G}_{\Lambda_n})^{-1} Q_T \mathbf{G}_{\Lambda_n} |0\rangle = n \tag{7.261}$$

が得られ, ゲージ関数がゼロでない巻き数をもつ純ゲージ配位に相当するときは, Q_T がゲージ不変でないことがわかる. この結果は Q_T のチャーン・サイモン密度の積分としての定義からも直接しめすことができる. しかし, これによって, 状態 $\mathbf{G}_{\Lambda_n}|0\rangle \equiv |n\rangle$ が $\langle n| Q_T |n\rangle = n$ をみたすことも明らかになった. したがって, 状態 $|0\rangle$ はトポロジー的に自明でない純ゲージ解を持つどの非可換ゲージ理論でもゲージ不変でないことがわかる. この問題の根源はガウスの法則が破られることにある. このような破れは, ゲージ群のコンパクト性から予言できたものだが, このコンパクト性がまさにトポロジー的に自明でない純ゲージ解でその漸近的振舞いのためにゲージ変換の演算子 $\mathbf{G}_\Lambda$ の部分積分の表面項が落せないものが生じた理由なのだ. したがって, 自明でない巻き数を持つ純ゲージ解を持つどの理論でも, 理論をゲージ不変にし, ガウスの法則を成立させるために変更を加えなければならない.

この問題を解く鍵は, 真空の性質を調べることにある. 状態 $|n\rangle$ は巻き数 n で特徴づけられている. しかし, ゲージ変換の生成子はハミルトニアンと可換であるから,

$$\langle n| H |n\rangle = \langle 0| (\mathbf{G}_{\Lambda_n})^{-1} H \mathbf{G}_{\Lambda_n} |0\rangle = \langle 0| H |0\rangle = 0 \tag{7.262}$$

が成立する．これにより，無限個の状態があって，そのどれもがトポロジー的に自明な真空とエネルギー的に縮退していることがわかる．$\mathbf{G}_{\Lambda_n}$ はトポロジー的に自明な状態から，自明でない状態をつくるので，**大きな**ゲージ変換とよばれる．

次に，トポロジー的な演算子 $\hat{N}$ を定義して，$\hat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$ であるようにしよう．大きなゲージ変換は $\hat{N}$ に対して，昇降演算子として振舞う．これは，

$$\begin{aligned}\hat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \quad &\Rightarrow \quad [\hat{N}, \mathbf{G}_{\Lambda_n}]\,|0\rangle = n\mathbf{G}_{\Lambda_n}\,|0\rangle \\ &\Rightarrow \quad [\hat{N}, \mathbf{G}_{\Lambda_n}] = n\mathbf{G}_{\Lambda_n} \end{aligned} \tag{7.263}$$

からわかる．この結果を使うと，大きなゲージ変換はトポロジー的に，

$$\hat{N}\,\mathbf{G}_{\Lambda_m}\mathbf{G}_{\Lambda_n}\,|0\rangle = (n+m)\mathbf{G}_{\Lambda_m}\mathbf{G}_{\Lambda_n}\,|0\rangle \tag{7.264}$$

という意味で，加算的であることがわかる．したがって，大きなゲージ変換はトポロジー的に並進演算子として働く．

$$\mathbf{G}_{\Lambda_m}\,|n\rangle = |n+m\rangle\ . \tag{7.265}$$

次に演算子 $\hat{\theta}$ を導入する．これは$\hat{N}$ に正準共役であり，$[\hat{\theta}, \hat{N}] = i$ を満たす．$\hat{\theta}$ の固有状態を $|\theta\rangle$ と書く．$\hat{\theta}$ と $\hat{N}$ の交換子は3.4 節の量子力学での角度と角運動量の交換子と同じで，状態 $|\theta\rangle$ は $|n\rangle$ を使って展開できる．

$$|\theta\rangle = \sum_n |n\rangle\,\langle\, n\,|\,\theta\,\rangle = \sum_n e^{in\theta}\,|n\rangle = \sum_n e^{in\theta}\mathbf{G}_{\Lambda_n}\,|0\rangle\ . \tag{7.266}$$

この状態は２つの重要な性質を持っている．第一に，この状態はトポロジー的真空とエネルギー的に縮退している．これはH が大きなゲージ変換と可換であるために θ の値に依らず，$\langle\theta|\,H\,|\theta\rangle = 0$ であるからだ．第二には，これは大きなゲージ変換の固有状態になっていることだ．

$$\mathbf{G}_{\Lambda_m}\,|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}\mathbf{G}_{\Lambda_m}\,|n\rangle = \sum_n e^{in\theta}\,|n+m\rangle = e^{-im\theta}\,|\theta\rangle\ . \tag{7.267}$$

この性質がガウスの法則を満たす鍵となる. 状態 $|\theta\rangle$ は大きなゲージ変換を施したときに位相因子のみを出すので, ゲージ不変な演算子 A の状態 $|\theta\rangle$ での期待値が大きなゲージ変換のもとでも真にゲージ不変だ.

$$\langle\theta|\left(\mathbf{G}_{\Lambda_n}\right)^{-1}A\mathbf{G}_{\Lambda_n}|\theta\rangle = \langle\theta|A|\theta\rangle \ . \tag{7.268}$$

最後のステップは, トポロジー的真空とエネルギー的に縮退していて, 位相を除いてはゲージ不変な状態を構成することだ. これは状態 $|\theta\rangle$ とファデーエフ・ポポフの方法を組み合わせることでできる. θ **真空** [33] は

$$|0,\theta\rangle = \int d\mu(g_0)\,\mathbf{G}_{\Lambda_0}|\theta\rangle \tag{7.269}$$

と定義される. ここで, ハール測度とゲージパラメータΛ_0 はトポロジー的に自明, つまり, 巻き数 0 のセクターにある. これが真にゲージ不変であることをみるためには, 任意のゲージ変換を施さなければならない. 任意のゲージ変換は 2 つの変換の積として書ける.

$$\mathbf{G}_{\Lambda} = \mathbf{G}_{\Lambda_0}\mathbf{G}_{\Lambda_m} \ . \tag{7.270}$$

ここで, $\mathbf{G}_{\Lambda}$ は m 番目のトポロジー的セクターに属するとした. このゲージ変換をθ 真空に施すと,

$$\mathbf{G}_{\Lambda}|0,\theta\rangle = e^{-im\theta}\int d\mu(g_0')\,\mathbf{G}_{\Lambda_0}\mathbf{G}_{\Lambda_0'}|\theta\rangle \tag{7.271}$$

となる.

$$\mathbf{G}_{\Lambda_0}\mathbf{G}_{\Lambda_0'} = \mathbf{G}_{\Lambda_0''} \tag{7.272}$$

という性質と, ハール測度の不変性,

$$d\mu(g_0') = d\mu(g_0'') \tag{7.273}$$

を使うと, すぐに θ 真空が, 無害な位相 $\exp(-im\theta)$ を除いてゲージ不変であることがわかる. しかし, ここで, 非可換理論のゲージ不変な基底状態が新

しいパラメータ θ を持ち, 並進, $\theta \to \theta + 2\pi$ のもとで, 周期性をもつこととなった.

θ 真空の形から, ガウスの法則, またはゲージ不変性をコンパクト群に対して課す正しい方法がわかった. 状態 $|0,\theta\rangle$ は,

$$\begin{aligned} |0,\theta\rangle &= \sum_n \int d\mu(g_0)\,\mathbf{G}_{\Lambda_0} e^{in\theta}\,|n\rangle \\ &= \sum_n \int d\mu(g_0)\,e^{in\theta}\mathbf{G}_{\Lambda_0}\mathbf{G}_{\Lambda_n}\,|0\rangle \end{aligned} \tag{7.274}$$

と書かれる. ゲージ変換の生成子がガウスの法則の汎関数として

$$\mathbf{G}_{\Lambda_n} = \exp\left\{ i \int d^4x\,\Lambda_n^a G^a \right\} \tag{7.275}$$

とあらわせることから, (7.274) のゲージ不変な測度が

$$|0,\theta\rangle = \sum_n \int d\mu(g_0)\,e^{in\theta}\exp\left\{ i \int d^4x\,(\Lambda_0^a + \Lambda_n^a)G^a \right\}|0\rangle \tag{7.276}$$

から読み取れる. ガウスの法則は, 位相因子を除いて, 経路積分の測度にあるデルタ関数を

$$\delta(G) \to \sum_n \int \mathcal{D}\mu(g_0)\,e^{in\theta}\exp\left\{ i \int d^4x\,(\Lambda_0^a + \Lambda_n^a)G^a \right\} \tag{7.277}$$

で置き換えて得られる. ここで, θ は任意の角度だ. ガウスの法則の指数関数は作用で A_0 を再定義して吸収できる. その結果, コンパクト群の体積が正しく分離される. この代償として, 全てのトポロジー的なセクターについての和と, $\exp(in\theta)$ という項が残った. こうして, 経路積分にあらわれる正しい測度は,

$$\mathcal{D}A^c = \sum_n \mathcal{D}\mu(g_0)\,\mathcal{D}A\,\delta(\chi)\,\Delta_\chi\,e^{in\theta} \tag{7.278}$$

で与えられる. 拘束された測度は θ 真空と同じく周期的になっている.

n についての和はゲージ場の測度に陰に含まれているとして書かないのが普通だ. 因子, $\exp(in\theta)$ は巻き数 n がゲージ場のポントリャーギン数として

書けるので, ゲージ場 A_μ が n 番目のトポロジー的セクターにあるとき,

$$e^{in\theta} = \exp\left\{\frac{i\theta g^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu}\right)\right\} \tag{7.279}$$

として作用に吸収する.

この結果, コンパクト群のもとで不変な非可換ゲージ理論の作用は(7.279)の θ 項を含む. この項は擬スカラーなので, CP 不変性が破れ, 観測に掛かる予言ができる [34]. これは, 標準模型での QCD セクターで起こる**強い CP の問題** (strong CP problem) として知られている. 実験的には θ に非常に小さな上限があることが知られている. しかし, これを説明するのに, θ を 0 にするのは, あまりに天下りで, 人為的な解決といえる. このため, ペッチェイ・クイン (Peccei-Quinn) 機構 [35] という θ を自然に 0 にする方法が編み出されている. 残念ながら, この問題をこれ以上議論するのはこの本の範囲を逸脱することになる.

グリボフ任意性の問題 [19] に戻って, トポロジー的セクターがあるときにそれを理解することが可能になる. グリボフ任意性はゲージ理論でガウスの法則の逆が一意的に取れないことから起こる. 以下の簡単な議論から, これが起こる状況を特徴づけることができる. λ を $n\times n$ 行列として, n 個の線形拘束条件を,

$$\lambda_{jk}x_k - a_j = 0 \tag{7.280}$$

と書く. もし λ が逆を持てば, この拘束条件の集合が一意的に解けて, 拘束条件のもとでの座標は,

$$x_j^c = (\lambda^{-1})_{kj}a_j \tag{7.281}$$

で与えられる. しかし, もし, λ が逆行列を持たなければ, これは不可能で, この場合, 拘束条件に一つ以上の解, または, 解の集合がある. λ にゼロ固有値があれば, 逆が存在せず, このような状態になる.

この議論は, 問題なくゲージ場の場合に一般化できる. 上の行列の役割は, ファデーフ・ポポフ行列式にあらわれる微分演算子が担っている. これは, ガウスの法則の拘束条件を解くためにこの演算子の逆をとるためだ. 一意性が

破れるのは, この微分演算子がなんらかの 0 固有値を持ち, 行列式がゼロになる場合だ. これは, ウィック回転が必要なもう一つの理由になっている. なぜなら, ユークリッド空間に解析接続しないと, ファデーフ・ポポフ行列式を定義する微分演算子の中の□ がQED でも 0 固有値を生じるからだ. ウィック回転をすると, ミンコフスキー空間であったクーロンゲージとローレンツゲージの間の人工的な区別が無くなって, それらが経路積分のなかで同じように働く. ファデーフ・ポポフ行列式の中の 0 固有値の存在はクーロンゲージで, 調べるべき微分演算子が$\delta_{ab}\nabla^2 + gf^a_{cb}A^c_j\partial_j$ であり, ゲージ場が拘束条件のために, $\partial_j A^a_j = 0$ の横波成分のみになっているときには簡単にわかる. これは, 対応するユークリッドでのローレンツゲージ条件の時間に依存しないものとみることができる. このゲージ条件でもグリボフ任意性の問題がある.

出発点は問題の微分演算子が分解できることにある. これは, A_j が横波であることを使って, $\partial_j(\delta_{ab}\partial_j + gf^a_{cb}A^c_j)$ とすればよい. もし以下を満たす関数 h^b があれば, 0 固有値が存在することになる.

$$(\delta_{ab}\partial_j + gf^a_{cb}A^c_j)h^b = 0\ . \tag{7.282}$$

h^b と A^c_j がともに純ゲージ配位のとき, (7.282) が満たされる. これは, (7.282) を随伴表現の行列方程式,

$$(\partial_j + igA_j)h = 0 \tag{7.283}$$

と書けば簡単にわかる. ここで, $A_j = A^a_j T^a$ で $h = h^a T^a$, $T^a_{(bc)} = -if^c_{ab}$ である. 方程式 (7.283) には解,

$$h = \mathbf{U}\ \ ,\ \ A_j = \frac{i}{g}(\partial_j \mathbf{U})\mathbf{U}^{-1} \tag{7.284}$$

がある. A^a_j と h^b のそれぞれの成分は群の生成子を掛けてトレースをとれば求められる.

ゼロ固有値があるかどうかを調べるには, 結局純ゲージ配位が横波ポテンシャル A^a_j を与えるかどうか見ればよいことになる. 可換な場合では, 純ゲージ形式は $\partial_j\Lambda$ で与えられるので, 問題は $\nabla^2\Lambda = 0$ を満たす 0 でない Λ を見

つけることに帰着する. 7.1 節でこの方程式に規格化可能な解を見つけることができないことをしめした. したがって, QED ではグリボフ任意性は存在しない. しかし, ゲージ群が SU(2) であるときにはそのような純ゲージポテンシャルを見つけることができる [36]. それは球対称な r の関数で,

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}\,\cos \tfrac{1}{2} g\omega + i\frac{x_j \sigma_j}{r} \sin \tfrac{1}{2} g\omega \tag{7.285}$$

から得られる. ここで, ω は r として決定しなければならない. 以下では簡便のため, 結合定数 g は 1 ととる. ゲージ場が横波でなければならないので, ω については以下の式が得られる.

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} - \sin 2\omega = 0\,, \quad t = \ln r\,. \tag{7.286}$$

例題 7.34: 横波条件から (7.286) が出ることをしめせ.

ω の境界条件は $\mathbf{U}$ が r のどの値でも逆をもつことで与えられる. 危ない点は $r = 0$ だ. $\omega(r = 0) = \omega(t = -\infty) = 2\pi n$ (n は整数) という制限をもうけると, $\mathbf{U}(r = 0) = \pm\mathbf{1}$ が保証される. (7.286) は導いた境界条件のもとで, 地上で不安定平衡点から出発する減衰単振動子のオイラー・ラグランジュ運動方程式になっている. したがって, この方程式は解があることが保証されていて, 初期速度によって解は 2 つの振る舞いのどちらかをとる. この振り子は不安定点に留まるか, やがて n 回転した後に $t \to \infty$ で安定点 $\omega = \pm\pi$ に落ち着いていくかである. この $\mathbf{U}$ にともなうゲージ場の配位は

$$A_j = -i \exp\left(-in\omega\right) \frac{1}{r} x_k \sigma_k \partial_j \exp\left(i\frac{n\omega}{r} x_l \sigma_l\right) \tag{7.287}$$

で与えられる. ここで, n は様々な境界条件に対応する. これをポントリャーギン数に代入して,

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\, F^* F = \tfrac{1}{2} n \tag{7.288}$$

を得る. これで, 少なくともこの場合にはグリボフ任意性が非可換ゲージ場のトポロジー的な性質と結び付いていることがわかった.

最後に，共変微分の幾何学的な性質について手短かに述べる．ミニマルに可換ゲージ場 A_μ と結合したスピノル場 ψ の運動方程式は，

$$\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi = 0 \tag{7.289}$$

である．もし，ある与えられた A_μ のもとで運動方程式を満たす場 ψ がある点 x_p でわかれば(これを ψ_p とする)，他の点 x でも関数 ψ_p を二つの点を結ぶ経路 P に沿って“引きずる” ことによって求まる．これには，

$$\psi(x) = \exp\left\{-ie\int_{x_p}^{x} dy^\mu\, A_\mu(y)\right\}\psi_p(x) \tag{7.290}$$

とする．ここでは dy^μ は x_p と x を結ぶ経路のパラメータだ．このように，A_μ は色々な点を結ぶ役割をしていて，このために微分幾何学では A_μ は**接続** (connection) と呼ばれる [27].

(7.290) の結果はアハラノフ・ボーム効果を引き起こす [37]. もし，ψ が荷電粒子の**波動関数**ならば，(7.290) に相当する関係式は，

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp\left\{-ie\int_{\mathbf{x}_p}^{\mathbf{x}} dy^j\, A_j(\mathbf{y})\right\}\psi_p(\mathbf{x}) \tag{7.291}$$

で与えられる．ここで，経路は完全に空間的とする．経路積分との類似から，別の点での波動関数は二つの点を繋ぐ全ての経路についての和として書けることがわかる．この和を二つの同じ程度の寄与をする経路に限ると以下の結果が得られる．波動関数は，

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\psi_1(x) + \psi_2(x)\Big) \tag{7.292}$$

となる．(7.291) を使うと，これにともなう x での確率密度は

$$|\psi(x)|^2 = \tfrac{1}{2}|\psi_p(x)|^2\left(1 + \sin e\oint_P dy^j\, A_j(y)\right) \tag{7.293}$$

で与えられることがわかる．ここで，閉じた経路 P は点 x_p と x を通る．

例題 7.35: (7.293) を確かめよ．

ストークスの定理から, (7.293) の積分は

$$\oint_P dy^j A_j = \int_{S(P)} d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \int_{S(P)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \Phi_{S(P)} \tag{7.294}$$

と書ける. ここで, $\Phi_{S(P)}$ は閉じた経路 P が定義する表面を通り抜ける磁束である.

これは, 量子力学的な干渉パターンは, どんな**局所的な**磁場からも影響を受けるという驚くべき結果を意味している. たとえ, 波束の軌跡が $\mathbf{B}$ が消えるところのみを通っていて, 電荷にローレンツ力がまったくかからなくても, 干渉パターンには観測可能な影響が出るわけだ. これは, 波束が $\mathbf{A}$ が 0 でない領域を動いているために, 古典的な場合と異なり, ベクトルポテンシャルが物理的に観測可能な効果を生み出しているわけだ. これをアハラノフ・ボーム効果と呼ぶ.

同様の議論から, 磁気単極子があるときにディラック量子化条件を導くことができる. 磁気単極子のまわりの閉じた経路に沿って電荷を動かしたときに生じる位相は

$$\psi \to \exp\left\{ie \oint_P dx^j A_j\right\}\psi = e^{i\lambda}\psi \tag{7.295}$$

だ. この位相因子はストークスの定理をもう一度使って,

$$i\lambda \equiv ie \oint_P dx^j A_j = ie \int_{S(P)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \tag{7.296}$$

と書かれる. 波動関数への影響は経路のみに依存するので, 積分を計算するための表面 $S(P)$ の選びかたによらないはずだ. つまり, 波動関数の変化は経路 P を境界とする**どの**空間的表面についても同じでなければならない. 二つの表面 S と S'での位相の差は,

$$i(\lambda - \lambda') = ie \int_{S(P)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} - ie \int_{S'(P)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \tag{7.297}$$

である.

面 S と S' は共通の周囲を持つので, それらを合わせるとある閉じた面を定義する. これらは任意であるので, もとの経路 P の内部となりえる任意の

体積 $\mathcal{V}$ を囲むようにできる. そこで, 位相の差は

$$i(\lambda - \lambda') = ie \oint_{S(\mathcal{V})} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = ie \int d^3x \, \nabla \cdot \mathbf{B} \tag{7.298}$$

と書ける. ここで, 発散定理を用いた. 磁気単極子解は静的な磁場

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^2}\hat{r} \;\Rightarrow\; \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \, \delta^3(\mathbf{x}) \tag{7.299}$$

で特徴づけられていて, これより, すぐに,

$$i(\lambda - \lambda') = i4\pi eg \tag{7.300}$$

がわかる. このストークスの定理を使う際に異なる表面を使うことによる位相の差は, もし e と g が

$$4\pi eg = 2\pi n \;\Rightarrow\; eg = \tfrac{1}{2}n \tag{7.301}$$

を満たせば, $\exp i(\lambda - \lambda') = 1$ より, 意味がなくなる. これがディラックの量子化条件だ.

この解析にあらわれる量は共変的に次のように書ける.

$$W = \exp\left\{ ie \oint_P dx^\mu \, A_\mu(x) \right\} . \tag{7.302}$$

この量は**ウィルソンループ** (Wilson loop) とよばれる. ウィルソンループはゲージ群 G の非可換ゲージ理論では

$$W_G = \exp\left\{ ig \oint_P dx^\mu A_\mu \right\} \tag{7.303}$$

と定義する. ここで, $A_\mu = A_\mu^a T^a$ である. W_G は閉じた経路を群の多様体へ写像するので, ホモトピー解析が適用できる. 特に, これは, $\pi_1(G)$ で与えられる. これ以上はこの本の範囲外になる.

例題 7.36: W_G がゲージ共変的であって, A_μ のゲージ変換のもとで, $W'_G = \mathbf{U} W_G \mathbf{U}^{-1}$ と変換することをしめせ.

波動関数や場が経路に沿って動かされる様子は共変微分で決められているので, 共変微分を使って**曲率** (curvature) が定義できる. あるものを閉じたループにそって動かしたときの変化を**ホロノミー**(holonomy) という. このホロノミーは曲率からの帰結であり, 接続がこの曲率を計算できるしかたで特徴づけているということだ. この概念は微分幾何学で曲がった多様体上での平行移動を考えることに源がある. これらの概念を系統だって発展させてリーマンは計量テンソルの概念に到達し, やがてこれが一般相対論の自然な枠組みとなった. 一般相対論の説明はこの本の範囲を逸脱するが, 接続にともなう曲率は共変微分 D_μ から,

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] \tag{7.304}$$

と与えられることは述べておこう. ちょっと考えると, これは微小な閉じたループのまわりにものを動かすのに伴うホロノミーになっていることがわかる. また, $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ の場を共変的にまとめた 2 形式, F は微分幾何学の曲率 2 形式になっている [27].

参考文献

[1] 例えば, ジャクソン著「古典電磁気学」(吉岡書店) を見よ.

[2] ゲージ不変性が重要な対称性だと最初に指摘したのは, W. Noether, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, **235** (1918) だ. また, **ゲージ不変性**という言葉は, ワイルがリーマン幾何を使って重力と電磁気学を古典的に統一しようとした彼の仕事の中で初めて使われた. (この言葉は, しばしば, 元のドイツ語から "測度不変性" と訳される.) これは, H. Weyl, Ann. Physik **59**, 101 (1919); H. Weyl, Z. Physik **56**, 330 (1929) を見よ.

[3] 荷電スカラー場にゲージ共変微分を初めて用いたのは, F. Fock, Z. Physik **39**, 226 (1926). また, 現代的な形式は, P. T. Matthews, Phys. Rev. **80**, 292 (1950) にある.

[4] ゲージ条件の百科事典的なレビューとしては, G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **59**, 1067 (1987) がある.

[5] J.M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[6] S.N. Gupta, Proc. Phys. Soc. London **A63**, 681 (1950); K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).

[7] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, Ann. Phys. **98**, 287 (1976); I.V. Tyupin, Lebedev preprint, FIAN No. 39 (1975), 未出版.

[8] QED の共変理論をうちたてた原論文は, J. Schwinger, *Quantum Electrodynamics*, Dover, New York, 1958, に集められている. また, R.P.

Feynman, *Quantum Electrodynamics*, Benjamin, New York, 1961, も見よ.

[9] M.S. Swanson, Phys. Rev. D**24**, 2132 (1981); R.E. Pugh, Phys. Rev. D**33**, 1033 (1986).

[10] L.D. Faddeev, Teoret. i Mat. Fiz. **1**, 3 (1969).

[11] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[12] R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Benjamin, New York, 1964.

[13] L.D. Faddeev and V.N. Popov, Phys. Lett. **25B**, 29 (1967).

[14] B. Wybourne, *Classical Groups for Physicists*, Wiley, New York, 1974.

[15] ジョージアイ著「物理学におけるリー代数 –アイソスピンから統一理論へ–」（吉岡書店）.

[16] 核のアイソスピン模型のレビューとしては以下の文献がある. J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[17] 例えば, *The Eight-Fold Way*, ed. M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, Benjamin, New York, 1964, を見よ.

[18] 非可換ゲージ理論が最初に論じられたのは, O. Klein の *New Theories in Physics, Proceedings of the Conference Organized by the International Union of Physics and the Polish Intellectual Co-operation Committee*, Warsaw, May 30–June 3, 1939, International Institute of Intellectual Co-operation (Scientific Collection), Paris, 1939, である. ヤンとミルズによる現代的な形式は, C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. **96**, 379 (1954), にある.

[19] V.N. Gribov, Nucl. Phys. **B139**, 1 (1978).

[20] R.P. Feynman, Acta Physica Polonica **24**, 697 (1963).

[21] J. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D**8**, 1240 (1973); H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyller, Phys. Lett. **B47**, 365 (1973); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973).

[22] O. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964); M.Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **139B**, 1006 (1965).

[23] 例えば, 以下の文献を見よ. L.B. Okun, *Leptons and Quarks*, North-Holland, Amsterdam, 1982; F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and Leptons*, Wiley, New York, 1984; O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics: Concepts and Phenomena*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[24] K. Wilson, Phys. Rev. D**3**, 1818 (1971).

[25] 例えば, 以下の文献を見よ. *Lattice Gauge Theory—A Challenge in Large Scale Computing*, ed. B. Bunk, K.H. Mütter, and K. Schilling, Plenum, New York, 1986.

[26] 微分形式への優れた入門書としては, L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985, がある.

[27] 例えば, 以下の文献を見よ. T. Eguchi, P.B. Gilkey, and A.J. Hanson, Phys. Rep. **66**, 213 (1980); C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, New York, 1983; M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Adam Hilger, Bristol, 1990.

[28] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **A133**, 60 (1931).

[29] 例えば, 以下の文献を見よ. R. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[30] チャーン・サイモン項を作用とするゲージ場の理論は, E. Witten, Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989), にある.

[31] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, 172 (1976).

[32] 量子場の理論とゲージ群のトポロジー的な局面を扱った非常に優れた本に, R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, Elsevier, New York, 1987, がある.

[33] G. 't Hooft, Phys. Rev. **D14**, 3432 (1976); C. Callan, R. Dashen, and D. Gross, Phys. Lett. **63B**, 334 (1976).

[34] 例えば, 以下の文献を見よ. R.N. Mohapatra, *Unification and Supersymmetry*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[35] R.D. Peccei and H. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977).

[36] ここでの議論は, P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer, Second Edition*, Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989, にしたがっている.

[37] Y. Aharanov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).

第8章　摂動論

この章では, S行列を構成する時間順序積を経路積分法によって摂動論的に求める. そのために経路積分の一般的なテクニックを発展させることがこの章の目的である. その結果**ファインマン則**（Feynman rule）として知られる, 摂動の任意の次数の項を計算するための, 便利で視覚的にわかりやすい図形的な処方が得られる. しかしこれら各項は残念ながら発散積分を含み, そのままでは定義されない. 物理的に意味のある量を得るためには, この摂動展開に**くりこみ**（renormalization）を行なう必要がある.

前章でみたように非線形な場の理論を摂動論的に解析すると, 誤った, もしくは無意味な結果を生むことがある [1]. QEDは摂動論的な手法により正確に記述されると思われる理論の一例であり, くりこみ理論ははじめQEDにおいて開発された. 同様にQCDの関連するいくつかの過程でこの摂動論的な手法が有効だが, その適用範囲を越えるところにまでその結果を援用するには注意を要する. 残念ながら, 粒子の寿命や散乱断面積などの測定可能な物理量の導出やゲージ理論での摂動展開の系統的な取り扱いについては本書の水準を越えるので述べない. これらのことがらに関心のある読者にはQEDやQCD, 標準理論などのモデルで散乱, 崩壊, 自己エネルギー等を摂動論的に計算している多くの優れたテキスト [2] があるので, それらを薦める. この章では単に経路積分で出てくる諸量を計算するときに必要な道具立てを与えるにとどめる.

8.1節では経路積分に外場項を加えることにより場の理論の生成汎関数を定義し, その性質を述べる. 8.2節ではゲージ理論のBRST不変性とワード・

高橋恒等式を導く．8.3節では経路積分からファインマン則を導く手法を与え，それを種々の理論に適用する．8.4節ではくりこみの一般的な手法を概観し，**裸のパラメーター**(bare parameter)，**裸の場**(bare field) という概念を導入する．また，くりこみ可能性の必要条件を**次数勘定**(power counting)からみる．最後にくりこみ群について簡単に述べる．

8.1 生成汎関数

場の時間順序積を得るときには経路積分に外場項を加える．これは3.2節で量子力学について議論された生成汎関数による手法を場の理論に拡張したものに他ならない．ここで述べるテクニックはシュウィンガー，シマンチーク(Symanzik)，ヨナ・ラッシーニョ(Jona-Lasinio)による[3,4,5,6]．

まず最初に，簡単のためにスカラー場の場合について述べる．スカラー外場があるときのスカラー場の真空から真空への遷移振幅は，経路積分では次のように与えられる．

$$Z[J] = \langle 0 \,|\, 0 \rangle_J = \int_0^0 \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ i \int d^4x \, [\mathcal{L}(\phi) + J\phi] \right\}. \tag{8.1}$$

ただしここでは運動量積分を行なった後の経路積分の表式を用いている．経路積分を導く過程から，$Z[J]$ を汎関数微分するとスカラー外場の入った理論での場の時間順序積の真空期待値が得られることがわかる．

$$\begin{aligned} i^n \langle 0| \, T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\} \, |0\rangle_J &= \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \\ &= i^n \int_0^0 \mathcal{D}\phi \, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) \, \exp\left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi) + J\phi \right] \right\}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

ここで $J = 0$ とすれば元の理論での真空期待値が得られる．

6.7節から明らかなように物理的に重要なのは，(8.2)を $Z[J]$ で割った規格化された期待値である．そこで3.2節のときと同様に別の生成汎関数 $W[J] = -i \ln Z[J]$ を導入し，諸量をダイアグラムであらわす．n 点関数 $G_c(x_1, ..., x_n)$

は

$$G_c(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \tag{8.3}$$

により定義され，ダイアグラムとしては図8.1のように，配位空間上で丸の部分（以下ブロッブと呼ぶ）に引数の n 点を端点とする n 本の足をつけたものとしてあらわされる．ブロッブは非線形な力学の効果をあらわし，具体的なラグランジアンの型によって決まる．

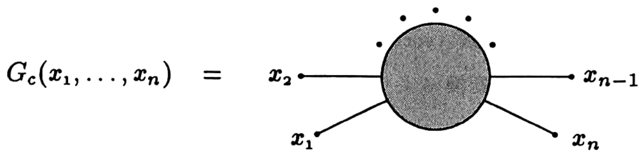


図8.1　n 点関数のダイアグラム表示

G_c と $Z[J]$ の汎関数微分との関係をみる．$W[J]$ を一回微分すると場 ϕ の規格化された真空期待値が得られる．

$$G_c(x)=\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}=-i\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}=\frac{\langle 0|\,\phi(x)\,|0\rangle_J}{\langle\,0\,|\,0\,\rangle_J}\;\equiv\;\phi_0(x)\,. \tag{8.4}$$

$J=0$ の極限でこれがゼロでないならば，真空期待値とS行列の関係からわかるように，一粒子状態が真空から励起されることになる．これは**不安定な**真空をあらわし，一般に理論に対称性の自発的破れのメカニズムをもたらす．これには詳しい議論を要するので9章で述べる．

また，$W[J]$ の二階微分より

$$\begin{aligned}G_c(x_1,x_2)\;&=\;-i\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}+i\frac{1}{(Z[J])^2}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)}\\&=\;i\frac{\langle 0|\,T\{\phi(x_1)\,\phi(x_2)\}\,|0\rangle_J}{\langle\,0\,|\,0\,\rangle_J}-i\,\phi_0(x_1)\,\phi_0(x_2)\,.\end{aligned} \tag{8.5}$$

を得る．これは，規格化された場の時間順序積の期待値から，場の期待値の積を引いたもので，これを用いて S 行列が構成される．よって $G_c(x_1,x_2)$ は**連**

結2点関数をあらわす．3点以上の n 点関数についても同様のことがいえる．S行列との関係から，これらの n 点関数はしばしば**一般化されたグリーン関数**とよばれる．

> **例題8.1**: 上記の構造をあらわにみるため，3点関数を3つの場の規格化された時間順序積と1点，2点関数であらわせ．

$W[J]$ はS行列の表式にあらわれる**連結** n 点関数の生成汎関数である．ダイアグラムを用いて考えるには，これら連結 n 点関数を**プロパゲーター**（propagator）と**頂点関数**（vertex function）に分解するとよい．4.5節と同様に汎関数ルジャンドル変換により，**有効作用**（effective action）$\Gamma[\phi_0]$ を定義する．

$$\Gamma[\phi_0] = W[J] - \int d^4y\, J(y)\, \phi_0(y) \,. \tag{8.6}$$

この定義から

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)} = \int d^4y\, \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\, \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_0(x)} - \int d^4y\, \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_0(x)}\, \phi_0(y) - J(x) \,. \tag{8.7}$$

ただし，ここで汎関数の連鎖微分則を用いた．(8.4) を (8.7) に代入して

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)} = -J(x) \,. \tag{8.8}$$

(8.8) の関係式は後にいくつかのモデルでみるように，理論の持つ真空の構造を調べるのに用いられる．

Γ の高階の汎関数微分と連結 n 点関数の関係は次のようになる．(8.5), (8.8) と連鎖微分則から，

$$\begin{aligned}
\delta^4(x_1 - x_2) &= \frac{\delta J(x_1)}{\delta J(x_2)} = \int d^4y\, \frac{\delta J(x_1)}{\delta\phi_0(y)}\, \frac{\delta\phi_0(y)}{\delta J(x_2)} \\
&= -\int d^4y\, \frac{\delta^2\Gamma[\phi_0]}{\delta\phi_0(x_1)\,\delta\phi_0(y)}\, G_c(y, x_2) \,.
\end{aligned} \tag{8.9}$$

すなわち有効作用の二階微分は連結2点関数の逆である．連結2点関数はグラフでは，その引数を結ぶ線であらわされる．$G_c(x_1, x_2)$ はプロパゲーター

とよばれ, 2点間を粒子が飛ぶという視覚的な解釈ができる. このことは始状態, 終状態が1粒子状態のときのS行列をみればよりよくわかる.

Γ の ϕ_0 による n 階微分は $A(x_1, ..., x_n)$ と書く. (8.9) を $J(x_3)$ で汎関数微分し, 再び連鎖微分則を使うと

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4y_1\, d^4y_2\, A(x_1, y_1, y_2)\, G_c(y_2, x_2)\, G_c(y_1, x_1) \\ &\quad + \int d^4y_1 A(x_1, y_1)\, G_c(y_1, x_2, x_3) \end{aligned} \tag{8.10}$$

となる. (8.9) を用いて (8.10) を $G_c(x_1, x_2, x_3)$ について解くと,

$$G_c(x_1, x_2, x_3) = \\ \int d^4y_1\, d^4y_2\, d^4y_3\, G_c(y_1, x_1)\, G_c(y_2, x_2)\, G_c(y_3, x_3)\, A(y_1, y_2, y_3)\,. \tag{8.11}$$

となる. これをダイアグラムであらわすと次のようになる.

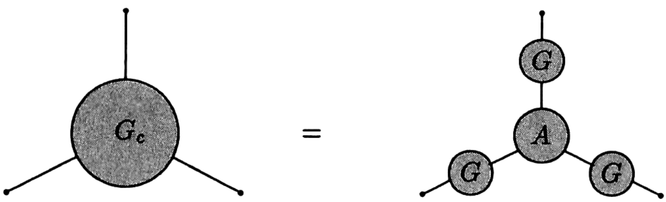


図8.2 3点関数の分解

Γ の汎関数微分から理論の頂点関数が得られる. そのダイアグラムを使った視覚的な表現に外線間を結ぶ非線形ダイナミクスが集約されている. プロパゲーターは, その引数の2点の間を粒子が飛ぶ確率振幅をあらわす. ある理論に対し, その理論の頂点関数とは, もうそれ以上複数の関数の積に分解できないものをいう. 一つの頂点関数中で2つのより低次の頂点関数が一本のプロパゲーターでむすばれているようなことはない. すなわち頂点関数は一本のプロパゲーターを切っても2つに分かれてしまわない. このことを頂点関数は**1粒子既約** (one particle irreducible) であるという.

例題 8.2: 4点関数は図 8.3 のように分解できることをしめせ.

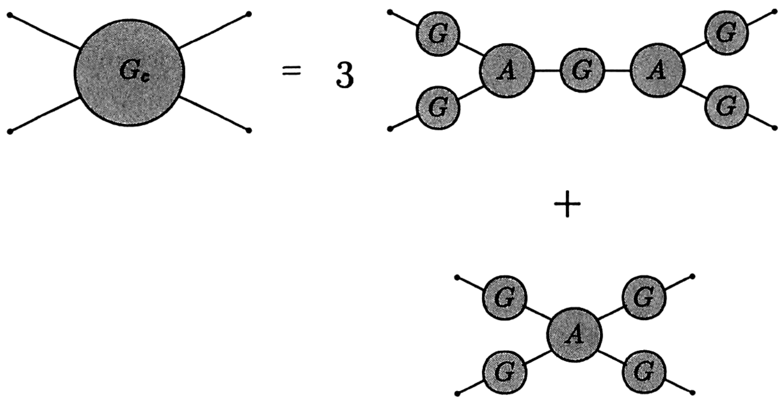


図 8.3 4点関数の分解

これらの結果は一成分のスカラー場のときにしめしたが, スピノル場やベクトル場にも素直に一般化できる. スピノル場のときはグラスマン数でスピノルとして変換する外場 $K, \bar{K}$, ベクトル場のときはベクトルとして変換する外場 J_μ を入れるとよい.

一成分のスカラー場のとき, 有効作用は $\phi_0 = 0$ のまわりで汎関数級数展開できる.

$$\Gamma[\phi_0] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \, \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \, A_0(x_1, \ldots, x_n) \,. \tag{8.12}$$

ただし,

$$A_0(x_1, \ldots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\phi_0]}{\delta\phi_0(x_1) \cdots \delta\phi_0(x_n)} \right|_{\phi_0 = 0} . \tag{8.13}$$

(8.12) 式の級数展開からわかるように, ϕ_0 がゼロでない理論での頂点関数は $\phi_0 = 0$ の理論の頂点関数から得られる. 例えば外場項は (8.8) から

$$A_{\phi_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \, \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \, A_0(x, x_1, \ldots, x_n) \tag{8.14}$$

となる．これらのことから理論を一旦 $\phi_0 = 0$ でくりこめば，$\phi_0 \neq 0$ でも頂点関数は（級数の収束の問題を除いて）よい振舞いをすることがわかる．

量子力学の場合と同様に，有効作用は一定値 ϕ_0 のまわりで展開できる．頂点関数はたいてい並進不変な関数であるが，かならずそうであるわけではない．とくに，基底状態が並進不変でないときには頂点関数も並進不変でない．しかし，もしそれらが並進不変なら一定の ϕ_0 のまわりで展開したときの有効作用から時空の体積積分がくくり出せる．これは，特に最低次のところでは並進不変性より $A(x)$ が定数になることからすぐにわかる．こうして**有効ポテンシャル**（effective potential $V_{\rm eff}(\phi_0)$ ）が

$$\Gamma[\phi_0] \approx -V_{\rm eff}(\phi_0) \int d^4x \tag{8.15}$$

と定義される．有効ポテンシャルは ϕ_0 のみの関数だが，有効作用のもつ多くの情報を担っている．

有効ポテンシャルと頂点関数の関係は，有効作用の級数展開表示と並進不変な関数に対する一般的な表示

$$\begin{aligned} A(x_1, \ldots, x_n) &= \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n) \\ &\quad \times \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \right\} \tilde{A}(p_1, \ldots, p_n) \end{aligned} \tag{8.16}$$

からわかる．ここで $\tilde{A}$ は関数 A を運動量空間へフーリエ変換したものである．(8.16) のデルタ関数は，もとの関数が定ベクトルにより $A(x_1, ..., x_n) \to A(x_1 + a, ..., x_n + a)$ と引数を変えても不変であることを保証する．系の基底状態もしくは場の真空期待値が並進不変な場合，そのような不変性はあらゆる過程での運動量の保存を意味する．(8.12) に (8.16) を代入し，ϕ_0 を定数とすると，

$$\Gamma[\phi_0] \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi_0)^n \tilde{A}(0, \ldots, 0) (2\pi)^4 \delta^4(0) \tag{8.17}$$

となり, (8.15) の有効ポテンシャルの定義と恒等式,

$$\delta^4(0) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x \tag{8.18}$$

を使うと, 有効ポテンシャルがゼロ運動量での頂点関数であらわされる.

$$V_{\rm eff}(\phi_0) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\phi_0)^n\,\tilde{A}(0,\ldots,0)\,. \tag{8.19}$$

有効ポテンシャルを構成するには, 頂点関数を求め, そのフーリエ変換のゼロ運動量での値を (8.19) の展開式に代入するとよいことが明らかになった. 外場項 J をゼロにすると元の理論が得られ, この関数は (8.8) を満たす. つまり

$$\frac{\partial V_{\rm eff}(\phi_0)}{\partial\phi_0} = 0 \tag{8.20}$$

である. (8.20) から, ϕ の並進不変なゼロでない真空期待値についての条件（有効ポテンシャルに極値をあたえるという条件）が得られる. ϕ_0 がゼロでないときのゼロ運動量の頂点関数は, (8.20) から得られる ϕ_0 の値での (8.19) の微係数から求まる.

有効ポテンシャルが満たすべき関係は次のようになる. 並進不変なプロパゲーターは, フーリエ変換すると,

$$\begin{aligned} G_c(x,y) = G_c(x-y) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\tilde{G}_c(p,k)\,\delta^4(p+k)\,e^{i(px+ky)} \\ &\equiv \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\tilde{G}(p)\,e^{ip(x-y)} \end{aligned} \tag{8.21}$$

となり, $A(x,y)$ がプロパゲーターの逆であることから,

$$\tilde{A}(0,0) = \tilde{G}^{-1}(p=0)\,. \tag{8.22}$$

すなわち, V_{eff} の2階微分は,

$$\frac{\partial^2 V_{\rm eff}(\phi_0)}{\partial{\phi_0}^2} = -\tilde{G}^{-1}(p=0) \tag{8.23}$$

となる. (8.23) の右辺は, 後にみるように粒子の質量に対応し, 安定な理論では正でなければならない. 安定な真空は, 有効ポテンシャルの少なくとも極

小点でないといけないということから, 有効ポテンシャルは古典的なポテンシャルのアナロジーになっている. 高階微分は有効ポテンシャルをくりこむときに使われるが, それを述べるには, もう少し準備がいる.

これらの議論を $K(x,y)\phi(x)\phi(y)$ のような複合型の外場があるときに一般化するのも可能である. このような場合, 有効作用に対応する生成汎関数と有効ポテンシャルの満たす式はさらに複雑となり, 場の真空期待値だけでなくプロパゲーターも含む一組の非線形の積分方程式が導かれる [7].

8.2 ワード・高橋恒等式

経路積分にあらわれる作用が対称性を持っているとき, その対称性は理論のグリーン関数や頂点関数の間の関係式として形を変えてあらわれる. 量子力学の場合に 4.3 節でみたように, 対称性があると時間順序積や期待値に一連の恒等式がなりたつ. この考え方を場の理論へ拡張したものが種々あり, ワード・高橋恒等式やスラフノフ・テーラー恒等式として知られている. 後者は通常ゲージ理論での BRST 対称性 [8] と関係があるものをいう. これらの恒等式は前節で定義した生成汎関数を用いてあらわされる.

6.4 節でネーターの定理を述べたときと同じく, ここでの対称性とは場や場の引数に対する連続変換で, 作用を不変にするようなものをいう. この節では特に, 場の型を変えるだけの連続変換に限って考える. これは無限小変換では, $\Psi_\alpha(x) \to \Psi'_\alpha = \Psi_\alpha(x) + \delta\Psi_\alpha(x)$ とあらわされる. 有限変換では（たいていの場合ユニタリー行列により）, $\Psi_\alpha(x) \to U_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x)$ とあらわされる. ユニタリーではない変換としては, 例えば 6.2 節でみた（ユニタリーではない）ユニモジュラー行列を含むワイル・スピノルのローレンツ変換がある. いずれにせよ, たいていの場合無限小変換は, 単位行列のまわりで $U_{\alpha\beta} \approx \delta_{\alpha\beta} + \delta U_{\alpha\beta}$ と展開できる.

前節の議論から明らかなように, 時間順序積の生成汎関数には場の量について一次の外場項を入れて考える. **場のみ**を変換すると, 元の外場を含まな

い作用と経路積分の測度は不変だが, たいていの場合外場項は変化する. 例えば, $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ という変換に対して, $J\phi$ という項は J が同時に $J \to e^{-i\alpha}J$ と変換しない限りは不変でない. このような変換が必ずしも必要でないことは, 光子の外場項が $J^{\mu}A_{\mu}$ の積分の形をもつQEDの場合にみてとれる. この外場項のゲージ変換についての不変性はすぐ後に述べる.

経路積分表示が, あるリー群による大域的な（場所によらない）変換で不変な理論については一般に今と同じように, 不変性を保つように外場項を加えることができる. 場の変換をちょうど打ち消すような変換性を外場に課すとよい. しばらくの間, スカラー場の多重項 ϕ_j のみからなる場を考える. もともと$\phi'_j = U_{jk}\phi_k$ という変換で不変な作用に $J_j\phi_j$ という項が加われば, この外場項は全体の不変性を保つためには$J'_j = (\mathbf{U}^{-1})_{jk}J_k$ と変換されなければならない. この逆変換は無限小で $(U^{-1})_{jk} \approx \delta_{jk} - \delta U_{jk}$ となる. この議論を逆に使うと, 連結 n 点関数の生成汎関数は外場項にこの変換を施しても不変ということになる. なぜなら, その変化分は場の積分変数をとりなおすことにより補えるからだ（ただし積分測度も変換で不変とする）. 測度の各時刻でのヤコビアンは

$$\prod_j d\phi_j \to \det \mathbf{U} \prod_j d\phi'_j \tag{8.24}$$

で, $\mathbf{U}$ がユニタリーなら $\det \mathbf{U} = \pm 1$ なので測度は不変となる. すると

$$W[J'] = W[J] \quad \Rightarrow \quad W[J - \delta U J] - W[J] = 0\,. \tag{8.25}$$

これを級数展開するとグリーン関数の間の恒等式を生成する等式が得られる.

$$\int d^4x\, \delta U_{jk} J_k(x)\, \frac{\delta W[J]}{\delta J_j(x)} = 0\,. \tag{8.26}$$

$\mathbf{U}$ がリー群の元ならば, 無限小変換は $\delta U_{jk} = i\Lambda^a T^a_{jk}$ と書ける. この無限小パラメータは任意にとれるので, 生成子は群の次元と同じ数だけある.

$$\int d^4x\, T^a_{jk}\, J_k(x)\, \frac{\delta W[J]}{\delta J_j(x)} = 0 \;\; , \;\; \forall a\,. \tag{8.27}$$

(8.27) を汎関数微分すると様々な n 点関数の間の一連の厳密な関係式が得られる.

頂点関数とプロパゲーターの逆とを結ぶ重要な恒等式が有効作用から得られる. ローレンツ・ゲージでのQEDの作用は $\Box\Lambda = 0$ を満たす Λ によるゲージ変換で不変だ. QEDの生成汎関数をつくるには$\bar{K}\psi + \bar{\psi}K + J^\mu A_\mu$ という外場項を入れる. K と$\bar{K}$ はグラスマン数で, スピノルの添字は省略する. スピノルの外場 K と $\bar{K}$ は, ゲージ不変性をこわさないためには, ゲージ変換で $K \to \exp(-i\Lambda)K$ のように変換されねばならない. ゲージ場の外場項をゲージ不変にするには外場 J^μ が保存（ $\partial_\mu J^\mu = 0$ ）されていると仮定する必要がある. すると A_μ のゲージ変換による変化分は部分積分により消える.

$$\int d^4x\, J^\mu \partial_\mu \Lambda = \int d^4x\, \partial_\mu (J^\mu \Lambda) = 0\,. \tag{8.28}$$

ただし, Λ は遠方で充分速くゼロに近づくものとする.

外場を加えた作用が不変のとき, 有効作用も同じく不変になる. 有効作用はローレンツ・ゲージでの真空から真空への遷移振幅 $W[J^\mu, K, \bar{K}]$ から構成される. ローレンツ・ゲージのQEDで, 有効作用は

$$\Gamma[a_\mu, \eta, \bar{\eta}] = W[J^\mu, K, \bar{K}] - \int d^4x\, (\bar{K}\eta + \bar{\eta}K + J^\mu a_\mu) \tag{8.29}$$

で与えられる. ここで,

$$a_\mu(x) = \frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)}\,,\ \ \eta(x) = \frac{\delta W}{\delta \bar{K}(x)}\,,\ \ \bar{\eta}(x) = -\frac{\delta W}{\delta K(x)}\,. \tag{8.30}$$

(8.30) の最後の式にあるマイナス符号は K と η のグラスマン性による. (8.29) の定義から, $a_\mu, \eta, \bar{\eta}$ はそれぞれ対応する場と同じ変換性を持つことがわかる. また, 各外場の変換性とあわせるとこの変換で有効作用は不変なことがわかる. すなわち

$$\Gamma[a_\mu - \partial_\mu \Lambda, e^{ie\Lambda}\eta, e^{-ie\Lambda}\bar{\eta}] = \Gamma[a_\mu, \eta, \bar{\eta}]\,. \tag{8.31}$$

ゲージ変換による場の変化分について汎関数級数展開を行ない, 部分積分す

ると次の等式を得る.

$$\int d^4x\,\Lambda(x)\left[ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta(x)}\eta(x)-ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\eta}(x)}\bar{\eta}(x)+\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta a_\mu(x)}\right]=0\,. \qquad (8.32)$$

$\Lambda(x)$ は任意の関数なので, (8.32) の括弧の中はあらゆる点 x でゼロでなければならない. よって局所ゲージ不変性が生成汎関数の局所的な等式を与えることがわかる.

理論の真の真空は $J^\mu=K=\bar{K}=0$ の極限をとることにより得られ, QED では $a_\mu=\eta=\bar{\eta}=0$ の安定な真空になると思われる. よって (8.32) の局所的な表式に汎関数微分 $\delta/\delta\eta(y)$ と $\delta/\delta\bar{\eta}(z)$ を施し, $a_\mu=\eta=\bar{\eta}=0$ とおくと,

$$\begin{aligned}&-ie\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\eta}(z)\,\delta\eta(x)}\,\delta^4(x-y)+ie\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\eta}(x)\,\delta\eta(y)}\,\delta^4(x-z)\\&+\partial_\mu\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\eta}(z)\,\delta\eta(y)\,\delta a_\mu(x)}=0\,.\end{aligned} \qquad (8.33)$$

となる. (8.33) にある符号はグラスマン数の反可換性からでる.

恒等式 (8.33) はスピノル場のプロパゲーターと, ゲージ場とスピノル場の頂点関数を関係づける. これをみるには, 並進不変なスピノル場のプロパゲーターは（スピノル添字をあらわに書くと）

$$S_{ab}(x-y)=\frac{\langle 0|\,T\{\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)\}\,|0\rangle}{\langle 0\,|\,0\rangle}=\frac{\delta^2W}{\delta K_a(x)\,\delta\bar{K}_b(y)} \qquad (8.34)$$

と定義され, フーリエ変換すると,

$$S_{ab}(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\tilde{S}_{ab}(p)\,e^{ip(x-y)} \qquad (8.35)$$

となるので, (8.9) と同じ計算をすればよい. これらにより

$$\int d^4y\,S_{ab}(x-y)\,\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\eta}_b(y)\,\delta\eta_c(z)}=\delta_{ac}\delta^4(x-z) \qquad (8.36)$$

がしめされる. Γ の二階微分は, スピノル場のプロパゲーターの逆になる.

例題 8.3: (8.33) をフーリエ変換すると

$$\tilde{S}_{ab}^{-1}(p+q) - \tilde{S}_{ab}^{-1}(p) = q_\mu \tilde{A}_{ab}^{\mu}(p, q, -(p+q)) \tag{8.37}$$

となることをしめせ. ただし $\tilde{A}_{ab}^{\mu}$ はゲージ場, スピノル場の頂点関数をフーリエ変換したものである.

結論 (8.37) はQEDのワード・高橋恒等式の一つの例だ[9]. この式を非可換ゲージ理論へ一般化したものは, その理論のくりこみを論ずるときに大変重要な働きをする. このことには, 次節で簡単にふれる.

QEDのファインマン・ゲージでのファデーエフ・ポポフ・ゴースト場を含む経路積分には別の不変性がある. ラグランジアンはゲージ固定したあと, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{GI} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu \bar{c}\partial^\mu c$ となる. ここで $\mathcal{L}_{GI}$ はスピノル場とゲージ場とそれらの間の結合を含む作用のゲージ不変部分をあらわす. この作用全体は

$$\psi \to e^{iec}\psi\,, \quad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu c\,, \quad \bar{c} \to \bar{c} + \partial_\mu A^\mu \tag{8.38}$$

で与えられるBRST変換で不変だ.

例題 8.4: c のグラスマン性を使ってファインマン・ゲージにゲージ固定された作用と積分測度がともに変換 (8.38) で不変なことをしめせ. ただしゲージ不変なスピノルのラグランジアンは $i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi$ とする.

(8.38) という変換は作用にあらわれるc数とa数を混ぜるもので, 5.6 節で述べた超対称性変換と似た性質を持つ. ネーターの定理よりこの不変性に関する保存チャージが得られ, その結果は演算子形式でグラスマン数のBRST変換生成子

$$Q = \int d^3x \left(c\,\partial_\mu \dot{A}^\mu - \dot{c}\,\partial_\mu A^\mu \right) \tag{8.39}$$

になる. ここで A^μ のローレンツ・ゲージでの運動方程式を使った. この生成

子の経路積分による一般化はユークリッド形式で

$$Q = \int d^4x \; (c\,\partial_j \pi_j - \pi_{\bar{c}}\,\pi_0) \tag{8.40}$$

となる．ここで $\pi_{\bar{c}}$ は $\bar{c}$ の共役運動量だ．QEDの二つの拘束条件が Q に入っているため, Q 自身や Q と他の場との交換関係の真空期待値はゼロになる．cのグラスマン性のために Q はそれ自身と反可換で $Q^2 = 0$ となる．これは7.6節でみた外微分の性質 $d^2 = 0$ と似ていて, 実際この類似性を使ってゲージ理論の状態空間のコホモロジー構造を議論できる[10]．Q の中に拘束条件が入っており, Q はゲージ変換と同質のBRST変換を生成するということから, Q は理論の物理的スペクトルを選ぶのに使うことができる．状態ベクトルが物理的な部分空間に属するための条件は

$$Q\,|\mathrm{physical}\rangle = 0 \tag{8.41}$$

と表される．演算子形式では, 始めに(8.41)でもって物理的な状態が定義される[11]．ワード・高橋恒等式を導いたときのような経路積分形式でも, BRST不変性を使ってファデーエフ・ポポフ・ゴーストを含む恒等式が得られる．それらは非可換ゲージ理論ではより有用なのでその導出は後にふれる．

その他の一連の重要な恒等式は経路積分の測度の並進不変性から導かれる．測度を構成する場のうちのいくつかをc数またはa数で平行移動し, それに応じて場を変換すると経路積分は全体として値を変えない．これは4.3節で量子力学について導いたエーレンフェストの定理の場の理論版だ．QEDで似た例をみてみよう．ローレンツ・ゲージでの経路積分には, ゲージ場を $\Box\Lambda = 0$ をみたす Λ により $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ と変換する自由度が残っている．作用の変化は,

$$S \to S + \int d^4x\,\Lambda\,\partial_\mu J^\mu \tag{8.42}$$

となる．ここで J^μ はスピノル場によるカレントで, 外場と混同してはいけない．経路積分はこの変換で不変なはずなので $\partial_\mu J^\mu$ の真空期待値はゼロにな

らねばならない.

$$\frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}\,{}_+\langle\,0\,|\,0\,\rangle_-\bigg|_{\Lambda=0} = {}_+\langle 0|\,\partial_\mu J^\mu(x)\,|0\rangle_- \equiv \langle\,\partial_\mu J^\mu\,\rangle = 0\,. \tag{8.43}$$

これは $\partial_\mu J^\mu$ を含む時間順序積についても一般化される.

> **例題 8.5**: オイラー・ラグランジュ方程式の真空期待値がゼロになることをしめせ.

BRST 変換は非可換ゲージ理論の場合にもファデーエフ・ポポフ行列式をゴースト場に書き換えた後の形で定義できる. ゲージ場が物質場ψ_j とミニマル結合をしているとき, 対応する BRST 変換は次のように書ける.

$$\begin{aligned}
&\delta A^a_\mu = -\partial_\mu c^a + g\, f^a_{bc}\, A^b_\mu\, c^c = -D^{ab}_\mu c^b\,,\;\; \delta\psi_j = ig\, c^a\, T^a_{jk}\,\psi_k\,,\\
&\delta\bar{c}^a = \partial^\mu A^a_\mu\,,\;\; \delta c^a = \tfrac{1}{2} g\, f^a_{bc}\, c^b\, c^c\,.
\end{aligned} \tag{8.44}$$

> **例題 8.6**: (8.44) の BRST 変換がローレンツ・ゲージの作用を変えず, またそのヤコビアンが 1 になることをしめせ.

ファインマン・ゲージでの非可換ゲージ理論でも, 各々の場に対して外場を加えることにより, 生成汎関数を構成できる. つまり作用に

$$\int d^4x\,\left(J^a_\mu A^{a\mu} + \bar{K}_j\psi_j + \bar{\psi}_j K_j + S^a c^a + \bar{S}^a\bar{c}^a\right) \tag{8.45}$$

を加えればよい. ここで $S, \bar{S}, K$ と $\bar{K}$ はグラスマン数の外場だ. この外場項も BRST 変換で不変なためには外場もまた次のように変換されねばならない.

$$\begin{aligned}
&\delta\bar{S}^a = 0\,,\;\; \delta S^a = \tfrac{1}{2} g\, f^a_{bc}\, S^b\, c^c\,,\\
&\delta\bar{K}_j = -ig\bar{K}_k T^a_{kj} c^a \quad \delta K_j = igc^a T^a_{jk} K_k\,.
\end{aligned} \tag{8.46}$$

また J^μ は共変的な保存則を満たす.

$$\partial_\mu J^{a\mu} - g f^a_{bc}\, A^b_\mu\, J^{c\mu} = D^{ab}_\mu J^{b\mu} = 0\,. \tag{8.47}$$

$\bar{S}$ が変換されないのは測度にローレンツ・ゲージ条件$\delta(\partial_\mu A^{a\mu})$ があるためだ.

例題8.7: (8.47) を使って (8.44) , (8.46) であらわされる変換で外場項が不変なことを確かめよ.

これらの変換から非可換理論の有効作用を使って局所ワード・高橋恒等式の生成子が導かれる.

例題8.8: 作用と外場項のBRST不変性から (8.32) の非可換版の恒等式を導け.

8.3 ファインマン則の導出

経路積分を用いると 8.1 節で定義した一般のダイアグラムが摂動論的に求められる. 基本的な考え方は単純で, 3.2 節で量子力学の経路積分を考えたときの拡張にすぎない. 場の 3 次以上の項は外場による汎関数微分におきかえられ, 理論の "裸の" 頂点関数（以下, 頂点とよぶ.）を与える. 残った項は場と外場について 1 次と 2 次の項のみで, ガウス近似で積分される. すると理論に入っている各場の "裸の" プロパゲーターが得られる. こうして経路積分は頂点の級数としてあらわされる.

しばらくは簡単のため一成分のスカラー理論について議論する. まず作用を 3 つの部分に分ける.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + J\phi\,. \tag{8.48}$$

$\mathcal{L}_0$ の項は "基本" ラグランジアンをあらわし, 自由場の理論を定義する. スカラー理論の場合は

$$\mathcal{L}_0 = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{8.49}$$

となる. $\mathcal{L}_I$ の項は場の 3 次以上の項をすべて含む. いま, 例として

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{3!}g\phi^3 \tag{8.50}$$

とする．ここで g は（長さ）$^{-1}$ の次元を持つ定数だ．この相互作用を持つ理論は，実は簡単にわかるように整合性のある理論にならない．ポテンシャルが 3 次なためエネルギーに下限がなく，完全に相互作用を考慮した上での安定な真空はないのである．だからあくまでこの理論は摂動級数の導出法を説明するための道具でしかない．この例からわかるように，摂動計算はほとんどの理論で可能だが，その計算がまったく意味をなさないこともある．

真空期待値の生成汎関数は

$$Z[J] = \int_0^0 \bar{\mathcal{D}}\phi \, \exp\left\{ i \int d^4x \, (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + J\phi) \right\} =$$
$$\exp\left\{ i \int d^4x \, \mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) \right\} \int_0^0 \bar{\mathcal{D}}\phi \, \exp\left\{ i \int d^4x \, (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right\} \quad (8.51)$$

とあらわされる．$\delta/i\delta J(x)$ は $\mathcal{L}_I$ に引数として代入する．汎関数微分をふくむ部分を級数に展開し，それを後ろの部分にかけると元の経路積分が再現される．だから少なくとも形式的には (8.51) にあらわれる 2 つの式は等しいといえる．

基本となる経路積分は

$$Z_0[J] = \int_0^0 \bar{\mathcal{D}}\phi \, \exp\left\{ i \int d^4x \, (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right\} \quad (8.52)$$

と書かれる．これを求めるには，まず 6.8.1 節で導いたミンコフスキー時空の運動量空間での表示を使う．ユークリッド時空でのやり方は後にみる．経路積分の積分範囲から，作用は部分積分でき，

$$S_0 = -\int d^4x \, \left[\tfrac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi - J\phi \right] \quad (8.53)$$

となる．場 ϕ と J をフーリエ展開して

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \, \tilde{\phi}(p) \, e^{ipx} \, , \quad J(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \, \tilde{J}(p) \, e^{ipx} \, . \quad (8.54)$$

$\lambda_p = p^2 - m^2$ と書き，(8.54) を (8.53) に代入すると

$$S_0 = \int d^4p \, \left[\tfrac{1}{2}\lambda_p \, \tilde{\phi}(-p) \, \tilde{\phi}(p) + \tilde{J}(-p) \, \tilde{\phi}(p) \right] \quad (8.55)$$

が得られる．一方 6.8.3 節から経路積分の測度は全体の規格も含め

$$\bar{\mathcal{D}}\phi = \prod_p d\tilde{\phi}(p) \tag{8.56}$$

となる．

積分は運動量空間を $\omega \geq 0, \omega \leq 0$ の 2 つの部分に分けて行なう．　測度は

$$\bar{\mathcal{D}}\phi = \prod_{p(\omega>0)} d\tilde{\phi}(p)\, d\tilde{\phi}(-p) \tag{8.57}$$

作用は

$$S_0 = \int_{p(\omega>0)} d^4p \left[\lambda_p\, \tilde{\phi}(p)\tilde{\phi}(-p) + \tilde{J}(-p)\tilde{\phi}(p) + \tilde{J}(p)\tilde{\phi}(-p)\right] \tag{8.58}$$

となる．p についての積分をリーマン和に戻して d^4p の因子を消してから $d\tilde{\phi}(p)$ の積分をすると $\delta(\lambda_p\tilde{\phi}(-p) + \tilde{J}(-p))$ の形のデルタ関数の積になる．デルタ関数の性質を使うと $d\tilde{\phi}(-p)$ 積分ができ，結果

$$Z_0[J] = N\left[\prod_{p(\omega>0)} \frac{1}{\lambda_p}\right] \exp\left\{-i\int_{p(\omega>0)} d^4p\, \tilde{J}(-p)\frac{1}{\lambda_p}\tilde{J}(p)\right\} \tag{8.59}$$

となる．ここで N は J によらない規格化因子だ．

p のとる範囲には $\lambda_p = 0$ となるところがあるので，(8.59) の結果は微妙だ．実際質量殻上 (on mass shell) と言われる $\omega = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ となる p では $\lambda_p = 0$ で，形式的な積分はできない．これに対する処理のしかたとしては $\lambda_p^E \geq m^2$ のユークリッド領域で積分するというものと，λ_p に微小な虚数項を加えて $\lambda_p = p^2 - m^2 + i\epsilon$ として λ_p が 0 にならないようにして積分し，最後に $\epsilon \to 0$ とするというものとがある．ここでは逆演算子の**正則化**と言われる後者の方法に従う．

(8.59) 式の積と積分は全運動量空間にひろげられ

$$Z_0[J] = N\left[\prod_p \frac{1}{\lambda_p}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\tfrac{1}{2}i\int d^4x\, d^4y\, J(x)\,\Delta(x-y)\,J(y)\right\} \tag{8.60}$$

ただし関数 Δ は次式で与えられる.

$$\Delta(x-y) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\lambda_p} e^{ip(x-y)} = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\,. \tag{8.61}$$

となる. $\epsilon \to 0$ の極限で関数 Δ は

$$(\Box_x + m^2)\Delta(x-y) = \delta^4(x-y) \tag{8.62}$$

を満たすので, $\Delta(x-y)$ はクライン・ゴードン演算子のプロパゲーターだ.

等式 (8.60) は配位空間での式 (6.301) の運動量空間版だ. 7 章で用いた簡略した記法でこのプロパゲーターは

$$\Delta = \frac{1}{\Box + m^2 - i\epsilon} \tag{8.63}$$

と表され, 全体にかかる因子は

$$\left[\prod_p \frac{1}{\lambda_p}\right]^{\frac{1}{2}} = \left\{\det(\Box + m^2 - i\epsilon)\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{8.64}$$

となる. この結果は作用が 2 次式になる他の物理系に一般化する上で有用だ. 結局 2 次形式の経路積分は, 作用の中の微分演算子を逆演算子に変える働きをする.

コーシーの留数定理と (2.18) の階段関数の定義を使って (8.61) の ω 積分は簡単に出来て,

$$\Delta(x_1-x_2) = i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\epsilon_p}\,\left[\theta(t_1-t_2)\,e^{-ip(x_1-x_2)} + \theta(t_2-t_1)\,e^{ip(x_1-x_2)}\right] \tag{8.65}$$

を得る. ここで p_0 は質量殻上で $p_0 = \epsilon_p = +\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$ を満たす.

例題 8.9: (8.65) を確かめよ

ここで, (8.65) の Δ が自由場の時間順序積の真空期待値

$$\Delta(x-y) = i\,\langle 0|\,T\{\phi(x)\,\phi(y)\}\,|0\rangle \tag{8.66}$$

だということをしめすことができる．これを使って経路積分が 6.7 節の終わりに議論した場の時間順序積に対するダイソン・ウィック展開を再現するということがしめせる．また (8.60) から $\mathcal{L}_I = 0$ である自由場については (8.61) が 8.1 節で定義した裸のプロパゲーターになっていることがわかる．よって (8.61) は相互作用があるときの最低次の近似なのでブロッブのない一本線のダイアグラムとしてあらわされる．(8.66) の結果は (8.61) で使った正則化の方法によっており，他の正則化をしたときは異なる順序付けによる場の積があらわれる．(8.66) の時間順序積はその引数が**空間的** (spacelike) に離れてもゼロにならないにもかかわらず**因果的** (causal) グリーン関数とよばれる．**遅延** (retarted) タイプや**先行** (advanced) タイプのグリーン関数に対応する場の順序付けや，それらグリーン関数の時空上での振舞いなどは本書の範囲を越えるのでここでは述べない [12].

二つの形式の関係をみるためにユークリッド空間での経路積分も求める．部分積分の後，ユークリッド作用は

$$S_E = i \int d^4x \left[\tfrac{1}{2}\phi(\Box_E + m^2)\phi - J\phi \right] \tag{8.67}$$

となる．実のユークリッド場 ϕ と実ユークリッドの外場 J は次のように展開される．

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, \phi_p e^{ipx}\,, \quad J(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, J_p e^{ipx}\,. \tag{8.68}$$

$\phi^* = \phi$ なので $\phi_p = \phi_{-p}$, J_p についても $J_p = J_{-p}$ となる．(8.68) を (8.67) に入れると次の結果が得られる．

$$S_E = i \int d^4p \left(\tfrac{1}{2}\lambda_p^E {\phi_p}^2 + J_{-p}\,\phi_p \right)\,. \tag{8.69}$$

ただし $\lambda_p^E = p_E^2 + m^2$ である．経路積分の測度は

$$\mathcal{D}\phi = \prod_p d\phi_p\,. \tag{8.70}$$

ガウス型の積分を行なうと

$$\begin{aligned} Z[J] &= N\prod_p \left[\frac{1}{\lambda_p}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int d^4p\, J_p \frac{1}{\lambda_p^E} J_{-p}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta_E(x-y)J(y)\right\} . \end{aligned} \tag{8.71}$$

ユークリッド・グリーン関数は

$$\Delta_E(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-y)}}{\lambda_p^E} \tag{8.72}$$

となる. ユークリッド・グリーン関数は $m \neq 0$ であるかぎり極を持たないので正則化の必要がない. これはいつもの $\omega \to -i\omega, t \to it$ のおきかえでミンコフスキー空間に解析接続される. こうして得られたものは以前導出した**正則化されていない**プロパゲーターだ.

ここまでくれば単純なスカラー理論のファインマン則が得られる. しかしその前に少し戻って考えよう. プランク定数を経路積分にあらわにいれると

$$Z[J] = \int_0^0 \bar{D}\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,(\mathcal{L} + J\phi)\right\} \tag{8.73}$$

となる. 経路積分の測度においても $\hbar$ を考慮に入れると, 結局各 p についてのスカラー測度に $1/\sqrt{\hbar}$ をかければよいことがわかる. 改めてこの節で行なった手順をくりかえすと,

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\, \mathcal{L}_I\left(\frac{\hbar\delta}{i\,\delta J(x)}\right)\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\,\Delta(x-y)\,J(y)\right\} \end{aligned} \tag{8.74}$$

が示せる. 全体にかかる因子Nは測度からと $\Box + m^2 - i\epsilon$ の汎関数行列式からくるものだが, 無視してよい. これは J を含んでおらず, どのみち規格化するときにうち消されるからだ.

時間順序積は (8.74) を汎関数微分すると得られる. n 点の時間順序積を求めるには(8.74) を n 回微分すればよい. そして (8.74) の始めの指数関数を

展開し, 二番目の項にかけると (8.50) にでてきた結合定数 g による摂動展開が得られる. 微分の後に $J=0$ の極限をとると（J を含まない）もとの理論の時間順序積の摂動表示が得られる.

この展開に対してダイアグラムによる表現ができ, ファインマン則として知られる [13]. ファインマン則は次のようにして得られる. 汎関数微分をするたびに裸のΔ の**半分**が指数部分から降りてきて, その Δ はダイアグラムとしてはその引数 2 点をむすぶ線であらわされる. $J=0$ ととると "半分" のΔ は消え, 2 回微分がかかった Δ だけが残ってプロパゲーターとなる. (8.74) の 1 つ目の指数関数の級数展開の各項からは今の場合同一点から 3 本の（半分の）線が出て理論の "裸の" バーテックスを与える. だからこの展開の r 番目の項は 3 本ずつ線が出ている r 点のバーテックスからなる. 逆に r 個のバーテックスを持つグラフはこの展開の第 r 項に対応するので $(-ig\hbar^2/3!)^r/r!$ がかかることがわかる. $W[J]$ は連結 n 点関数を生成するので, n 点関数の引数となっている点は全部がどれかのバーテックスに結ばれていなければならない. n 点関数は結局n 本の外線（足）を持つダイアグラムの和となる. 一般にファインマン則はバーテックスとプロパゲーターからなるが, ϕ^3 理論については図 8.4 のように要約される.

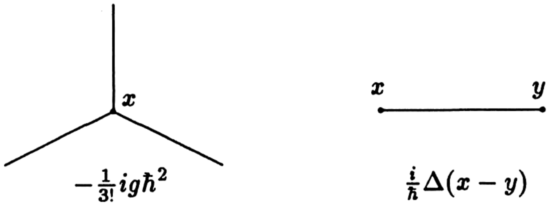


図8.4 ϕ^3 理論のファインマン則

各プロパゲーターは $i/\hbar$ の因子をともない, n 点関数の各グラフは微分から生じる $(\hbar/i)^n$ を含む. 連結グラフにかかる数因子としてはバーテックスと外線, バーテックスどおしをつなぐ "つなぎかた" についての "組合わせ" 因子がある. 特定のダイアグラムに対する組合わせ因子は微分則とバーテックス

が場の何乗からなるか（何点のバーテックスか）によって決まる.

具体例として ϕ^3 理論における相互作用も入れたプロパゲーター, すなわち 2 点関数に対する $O(g^2)$ 補正を考える. ダイアグラムは図 8.5 のようになる.

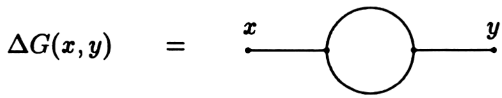


図 8.5　ϕ^3 理論におけるプロパゲーターの最低次の補正

各バーテックスの位置については全時空で積分され, またプロパゲーターは (8.61) のようなフーリエ変換を持つので, ダイアグラムは運動量空間で書くほうがわかりやすい. 最終的に n 点関数が S 行列に入るときには, 外線運動量は質量殻上におかれる. しかしいまは任意の運動量を持たせておく. 各バーテックスは全時空で積分されるのでそこを出入りする 4 次元運動量は保存される. 8.5 図のグラフが次のようなフーリエ変換を持つことをしめすのは読者の演習問題とする.

$$\Delta G(p) = \hbar \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \Sigma(p) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} , \tag{8.75}$$

自己エネルギー (self-energy) Σ は

$$\Sigma(p) = \frac{1}{2} i g^2 \hbar \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \tag{8.76}$$

と定義される.

> **例題 8.10**: (8.75), (8.76) を確かめよ

(8.76) では, 分母が k が大きいところで k の 4 乗で落ち, 積分測度も k の 4 乗なので, $k \to \infty$ で被積分関数は dk/k のように振舞う. このためこの積分は対数発散する. これは**次数勘定**として知られるテクニックの一例である. この発散するダイアグラムの計算とくりこみについては次節で述べる. しかし, この自己エネルギーがプロパゲーターの極の構造を自由場のときから変

えてしまうという点は指摘しておく．これは，（フルの）プロパゲーターが 8.6 図のように自己エネルギーのダイアグラムを部分に持つ無限個のダイアグラムを足し合わせになることによる．

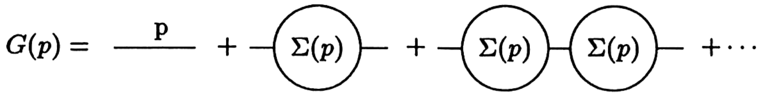


図 8.6　自己エネルギーによるプロパゲーターの極に対する補正

このダイアグラムは等比級数の和

$$G(p)=\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\Sigma(p)}{p^2-m^2+i\epsilon}\right]^n=\frac{1}{p^2-\Sigma(p)-m^2+i\epsilon} \qquad (8.77)$$

を与える．プロパゲーターへの自己エネルギー補正はどの場の理論でもこのような一般形になる．この式は量子効果もしくは非線形効果が質量スペクトルや理論の安定性を大きく変えてしまうことをあらわす．

N 点関数の特定のダイアグラムの持つ $\hbar$ の巾は次のように数え上げられる．グラフは N 個の外線（裸のプロパゲーター），I 個の内線（裸のプロパゲーター），V 個の（裸の）バーテックスからなる．各プロパゲーターは $\hbar$ の 1 乗，また各頂点は $\hbar$ の -1 乗を生じるので各ダイアグラムは $\hbar$ の $N+I-V$ 乗になる．I がないときもっとも巾が小さくなる．これは $V=1$ のときのみで，結局次数が最低で $N-1$ になる．しかし，$W[J]$ の定義からこの $N-1$ 乗は汎関数微分からくる $\hbar$ の巾と打ち消しあうことになる．よって，ダイアグラムの持つ $\hbar$ の巾は一般に $I-V+1$ となる．

すべてのダイアグラムのなかで L 個の閉じたループを持つものは，L 個の独立な運動量積分をともなう．ループの数は $\hbar$ の巾 $I-V+1$ に等しい．このことは次のようにしてわかる．まず，ループを構成する内線のプロパゲーターを一本カットし，ダイアグラムからループを一つ取り除く．一つカットするごとにもともと一本だったプロパゲーターが 2 本になりそれぞれの端点が外線の足になる．結果グラフは L ループから $L-1$ ループとなり I は $I-1$ にな

る．このループを除く操作で $\hbar$ の巾は一つ下がって $(I-1)-V+1=I-V$ となる．すなわちループ一つが $\hbar$ の1乗に対応する．そして $I=0$ で $V=1$ すなわち $L=0$ のときからわかるようにループのないグラフは $\hbar$ の0乗になる．このことからループの数はそのダイアグラムの $\hbar$ の巾そのものに等しく, $L=I-V+1$ で与えられることがわかる．

この結果は量子効果はループを含むダイアグラムだけに含まれていることを意味している．その他のダイアグラムではすべての線が異なるバーテックス間を結ぶかあるいは外線になるので, そのダイアグラムの見かけから**ツリー・ダイアグラム** (tree graphs) とよばれる．ツリー・ダイアグラムの寄与は $\hbar\to 0$ の極限でも消えずに残るので, それらは対応する各プロセスの**古典**極限になっている．このようにダイアグラムをループの数で分類すると摂動展開する際に便利だ．この展開ではダイアグラムが $\hbar$ の何次の巾に寄与するかがよくわかり, **ループ展開**といわれる．もちろんここまででしめしたのはスカラー理論についてだけだが, 他の理論でも同様のことが言える．

他の理論のファインマン則も同様に得られる．この手続きは, （例外を除けば [14]）外場項を加えた経路積分の2次の項の形をみることから始まり, 摂動展開で必要となるプロパゲーターを得る．以降典型的な2次のラグランジアンを持つスピノル場, ゲージ場, ゴースト場について求める．簡単のために解析接続の方法をとる．相互作用のない理論ではユークリッド空間とミンコフスキー空間のどちらでもよいが, ここではスピノルのプロパゲーターをユークリッド空間で求める．つまり $t\to -it$ とおきかえる．ミンコフスキー空間での表式は計算の最後に $t\to it$ とおきかえると得られる．

スピノルのプロパゲーターは次のグラスマン数積分で定義される．

$$Z[K,\bar{K}]=\int_0^0 \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left\{\frac{1}{\hbar}\int d^4x\,(\bar{\psi}iD_E\psi+\bar{K}\psi+\bar{\psi}K)\right\}. \tag{8.78}$$

ここで D_E は (6.282) で与えられたエルミートなユークリッド・ディラック演算子で,

$$D_E=(i\gamma_0\partial_0+\gamma\cdot\nabla+im) \tag{8.79}$$

となる. (6.305) のように変形して積分すると

$$Z[K,\bar{K}] = \\ N\det(iD_E)\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int d^4x\,d^4y\,\bar{K}(x)(iD_E)^{-1}(x,y)K(y)\right\} \tag{8.80}$$

となる. 積分測度の規格化定数をまとめて N とした.

逆演算子をミンコフスキー空間に解析接続するときは二つの点に注意がいる. 一つはユークリッドでの微分演算子が

$$iD_E(x,y) = (-\gamma_0\partial_0 + i\gamma\cdot\nabla - m)\delta_E^4(x-y) \tag{8.81}$$

と書かれ, デルタ関数の中に**ユークリッド時間** (Euclidean time) が入るということだ. これをミンコフスキー空間に解析接続すると i の因子が出る.

$$\delta_E(t-t') = -i\,\delta(t-t')\ . \tag{8.82}$$

解析接続する上でのもう一つの困難は, ミンコフスキー空間でのディラック演算子がゼロ固有値を持ち得て, 逆演算子の定義に問題が生じることからくる. これについてはスカラー場でのときと同様に $iD_E \to iD_E + i\epsilon$ とし, 計算の最後に $\epsilon \to 0$ とおくことにする. 経路積分をミンコフスキー空間に解析接続した最終結果は

$$Z[K,\bar{K}] = N\det(iD+i\epsilon) \\ \times\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,d^4y\,\bar{K}(x)(iD+i\epsilon)^{-1}(x,y)K(y)\right\} \tag{8.83}$$

となる. $iD = i\partial\!\!\!/ - m$ は普通のディラック演算子だ.

経路積分に暗に入っている境界条件のもとでのこの演算子の逆は $S(x-y)$ と書かれ

$$(iD(x)+i\epsilon)S(x-y) = \delta^4(x-y) \tag{8.84}$$

を満たす. デルタ関数をフーリエ積分で

$$\begin{aligned} S(x-y) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-ip(x-y)}}{p\!\!\!/ - m + i\epsilon} \\ &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\,e^{-ip(x-y)} \end{aligned} \tag{8.85}$$

が得られる. はじめの式 (8.78) から

$$\hbar^2 \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{K}(x)\, \delta K(y)}\bigg|_{K=0} = \frac{\langle 0|\, T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}\, |0\rangle}{\langle\, 0\,|\, 0\,\rangle} \,. \tag{8.86}$$

(8.83) を使うと

$$\hbar^2\ \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{K}(x)\, \delta K(y)}\bigg|_{K=0} = i\hbar\, S(x-y) \tag{8.87}$$

となる. ここでもグラスマン数の外場の反可換性に注意がいる.

例題 8.11: 6.5 節にあるスピノル場の自由場の展開式を反可換な場の時間順序積の定義に入れ, 交換関係を使って

$$\langle 0|\, T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}\, |0\rangle = i\hbar\, S(x-y) \tag{8.88}$$

をしめせ.

ゲージ場のプロパゲーターを定義するにはゲージを一つ選ぶ必要がある. この章ではローレンツ・ゲージで議論する. クーロン・ゲージでのプロパゲーターは読者の練習問題とする. ローレンツ・ゲージでのプロパゲーターはミンコフスキー空間での経路積分

$$Z[J_\mu] = \int_0^0 \mathcal{D}A\, \delta(\partial_\mu A^\mu)\ \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\, (\tfrac{1}{2}A^\mu \Box A_\mu - J_\mu A^\mu)\right\} \tag{8.89}$$

から得られる. ゲージ条件はデルタ関数を積分であらわすことによって作用の中にとりこむことができる. 共変的なユークリッド成分で作用を書き下すと

$$Z_E[J_\mu] = \int_0^0 \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\gamma\ \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int d^4x\, (\tfrac{1}{2}A_\mu \Box_E A_\mu + (J^E_\mu + \kappa\partial_\mu\gamma)A_\mu)\right\} \tag{8.90}$$

となる. 拘束条件を指数化したときのラグランジュの未定定数 γ については部分積分をおこなった. デルタ関数の引数は定数倍してもよいので, (8.90) に入っている実数 κ の値は任意だ. 物理的なプロセスや観測量はこの κ やゲージ条件によることはないため, パラメータ κ を入れたままのゲージ場のプロパゲーターを使うと, 計算結果のチェックができて便利だ [15]. しかしここで

は簡単のため以後 $\kappa = 1$ とする．また, (8.90) では $A^E_\mu A^\mu_E = -A_\mu A_\mu$ を使った．外場は, ユークリッド化した A^0_E にともなう i を吸収するようにユークリッド化した外場 $J^E_0 = -iJ_0$ を入れている．

ゲージ場を積分すると

$$
\begin{aligned}
Z_E[J_\mu] &= \left[\det\left(\frac{1}{\Box_E}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^0 \mathcal{D}\gamma \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int d^4x\, d^4y\, (J^E_\mu - \partial_\mu\gamma)_x \left(\frac{1}{\Box_E}\right)_{x,y} (J^E_\mu - \partial_\mu\gamma)_y\right\}.
\end{aligned} \tag{8.91}
$$

ここでユークリッド化された逆演算子は

$$
\frac{1}{\Box_E} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2_E} \tag{8.92}
$$

で与えられる．ユークリッド空間での p^2_E はミンコフスキー空間に接続されると$-p^2$ になる．γ と関係のない部分はミンコフスキー空間で

$$
\begin{aligned}
&\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int d^4x\, d^4y\, \left[J_j(x)\left(\frac{1}{\Box_E}\right)_{x,y} J_j(y) - J_0(x)\left(\frac{1}{\Box_E}\right)_{x,y} J_0(y)\right]\right\} \\
&\xrightarrow{M} \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\, d^4y\, \left[J_\mu(x)\left(\frac{1}{\Box - i\epsilon}\right)_{x,y} J^\mu(y)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{8.93}
$$

となる．ここでミンコフスキー逆演算子は前と同様に正則化されている．

(8.91) の γ による項は別々に扱って積分する．まずは指数の引数を部分積分し, (8.92) から得られる

$$
\partial^x_\mu \left(\frac{1}{\Box_E}\right)_{x,y} \overleftarrow{\partial}^y_\mu = \delta^4(x-y) \tag{8.94}
$$

を使う．経路積分の γ の入った項は結局

$$
\begin{aligned}
&\int_0^0 \mathcal{D}\gamma \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int d^4x\, d^4y\left[\frac{1}{2}\gamma(x)\delta^4(x-y)\gamma(y)\right.\right. \\
&\left.\left. - \gamma(x)\ \left(\partial^x_j\left(\frac{1}{\Box_E}\right)_{(x,y)} J_j(y) + \partial_0\left(\frac{1}{\Box_E}\right)_{(x,y)} iJ_0(y)\right)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{8.95}
$$

となる．これは再びガウス積分になっているので積分してミンコフスキー空間に戻すと

$$
N\exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\, d^4y\, d^4z\, J^\mu(x)\partial^x_\mu\left(\frac{1}{\Box}\right)_{(x,z)}\left(\frac{1}{\Box}\right)_{(z,y)} \overleftarrow{\partial}^y_\nu\, J^\nu(y)\right\} \tag{8.96}
$$

になる.

> **例題 8.12**: (8.96) を確かめよ.

見た通り (8.96) の表式はまだ正確には定義されていない. 運動量空間に移ると z 積分は

$$\int d^4z\, \partial^x_\mu \left(\frac{1}{\Box}\right)_{(x,z)} \left(\frac{1}{\Box}\right)_{(z,y)} \overleftarrow{\partial}^y_\nu = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu}{p^4 + i\epsilon}\, e^{ip(x-y)} \tag{8.97}$$

となる. ここでも積分は $i\epsilon$ 因子で正則化されているものとする.

(8.96) と (8.93) , (8.91) をあわせて最終的に

$$\begin{aligned} Z[J_\mu] \quad = \quad & \left[\det\left(\frac{1}{\Box - i\epsilon}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ & \times \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\, d^4y\, J^\mu(x)\Delta_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\right\} \end{aligned} \tag{8.98}$$

を得る. ここで

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^4 + i\epsilon}\right] e^{ip(x-y)}\,. \tag{8.99}$$

$\Delta_{\mu\nu}$ は $\partial_\mu \Delta_{\mu\nu} = 0$ を満たし, また$\Box\Delta_{\mu\nu}(x-y) \neq g_{\mu\nu}\delta^4(x-y)$ であることに注意.

このプロパゲーターから, ゴースト場が共変ゲージで S 行列にあらわれないことがたしかめられる. 6.6 節でスカラー場とスピノル場について得たLSZ換算公式がゲージ場についても同様に得られるが, in 状態と out 状態の物理的なスペクトルは横波成分の粒子と $\partial_\mu A^\mu$ のフーリエ変換にともなうゴースト場からなる. 横波成分が in 状態にある場合

$$\begin{aligned} & {}_{\text{out}}\langle\, A\,|\, \mathbf{p}, \gamma, B\,\rangle_{\text{in}} = \\ & \frac{i}{\sqrt{Z}}\int d^4x\, \frac{1}{\sqrt{16\pi^3\omega_k}} \varepsilon^\lambda_\mu(p) e^{ipx}\, \Box_x\ {}_{\text{out}}\langle A|\, A^\mu(x)\,|B\rangle_{\text{in}} \end{aligned} \tag{8.100}$$

のようになる. ここで ϵ^λ は 7.1 節にある偏極ベクトルで, 横波成分は $\lambda = 1, 2$ に対応する. $\partial_\mu A^\mu$ のフーリエ変換との関係により, ゴースト場を in 状態から

引き出すと

$$
{}_{\text{out}}\langle A\,|\,\mathbf{p},B\,\rangle_{\text{in}} = \frac{i}{\sqrt{Z}}\int d^4x\,\frac{1}{\sqrt{16\pi^3{\omega_k}^3}}e^{ipx}\Box_x\ {}_{\text{out}}\langle A|\,\partial_\mu A^\mu(x)\,|B\rangle_{\text{in}} \tag{8.101}
$$

となるが，この最後の表式はQED ゲージ条件 $\Box\partial_\mu A^\mu = 0$ から，もしくはゴースト場のプロパゲーターを A_μ のプロパゲーターの発散として扱うことから消えることがわかる．A^μ のプロパゲーターは横波で，$\partial_\mu\Delta^{\mu\nu} = 0$ なのでゴースト場に対応する外線は消える．

ファデーエフ・ポポフゴーストのプロパゲーターもよく似た方法で得られる．生成汎関数は

$$
Z[S,\bar{S}] = \int_0^0 \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\,\exp\left\{i\int d^4x\,\left(-\partial_\mu\bar{c}\,\partial^\mu c + S\bar{c} + \bar{S}c\right)\right\} \tag{8.102}
$$

で与えられる．グラスマン数の積分則とこの節で論じた方法を (8.102) に適用すると

$$
Z[S,\bar{S}] = N\det(\Box - i\epsilon)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,d^4y\,\bar{S}(x)\Delta_g(x-y)S(y)\right\} \tag{8.103}
$$

となり，ゴースト場のプロパゲーターは正則化されたミンコフスキー表示で

$$
\Delta_g(x-y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+i\epsilon} \tag{8.104}
$$

となる．

例題 8.13: (8.103) と (8.104) を確かめよ．

例題 8.14: 非可換ゲージ理論のファインマン・ゲージでのファインマン則を導け．

生成汎関数の経路積分表示から理論のプロパゲーターの非線形積分方程式を導くこともできる．簡単のため一成分のスカラー場の場合に限る．外場項

$J\phi$ を加えて作用は $\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I$ の二つに分けると生成汎関数は

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= N\exp\left\{i\int d^4z\,\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{\tfrac{1}{2}i\int d^4x\,d^4y\,J(x)\Delta(x-y)J(y)\right\}
\end{aligned}
\tag{8.105}
$$

となる. ここで Δ は $\mathcal{L}_0$ の中の演算子 $\Box+m^2$ の逆をあらわす. (8.105) を J で微分して $J=0$ とすると

$$
\begin{aligned}
&-i\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\,\delta J(y)}\bigg|_{J=0} = \Delta(x-y)\\
&+\int d^4z\,\Delta(x-z)\,\frac{1}{Z[J]}\mathcal{L}_I'\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)}\bigg|_{J=0}\,.
\end{aligned}
\tag{8.106}
$$

ここで

$$\mathcal{L}_I'(\phi)=\frac{\partial\mathcal{L}_I}{\partial\phi}\,. \tag{8.107}$$

(8.106) は交換関係

$$
\begin{aligned}
&\left[\exp\left\{i\int d^4z\,\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)\right\},J(y)\right]\\
&=\mathcal{L}_I'\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)\exp\left\{i\int d^4z\,\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{8.108}
$$

から得られる.

(8.106) の左辺はプロパゲーター $G(x,y)$ だ. これから自己エネルギー $\Sigma(x,y)$ を恒等式

$$\frac{1}{Z[J]}\mathcal{L}_I'\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)}\bigg|_{J=0}=-\int d^4x\,\Sigma(z,x)\,G(x,y) \tag{8.109}$$

によって定義できる. 関数 Δ の性質

$$(\Box+m^2)\Delta(x-y)=\delta^4(x-y) \tag{8.110}$$

と定義 (8.109) から (8.106) は積分方程式

$$(\Box+m^2)G(x,y)=\delta^4(x-y)-\int d^4z\,\Sigma(x,z)G(z,y) \tag{8.111}$$

が得られる. (8.111) の結果はダイソン・シュウィンガー方程式として知られる [16] . さらに $G(x,y)$ と $\Sigma(x,y)$ が並進不変でフーリエ変換が $\tilde{G}(p), \tilde{\Sigma}(p)$ とあらわせるとき, (8.111) は運動量空間で

$$\tilde{G}^{-1}(p) = -p^2 + m^2 + \tilde{\Sigma}(p) \tag{8.112}$$

となる. これはすでに (8.77) で得られた表式だ.

例題8.15: (8.112) を確かめよ.

8.4 くりこみ

この節ではくりこみ [17] についての概略を述べる. くりこみについて解説したテキスト [18] は種々あるので, より詳しく知りたい読者にはそれらを薦める. 一般に摂動展開であらわれる積分には発散が含まれる. これらの発散積分から有限な観測量を得る際に, くりこみという手続きが必要となる.

くりこみには二つのステップがある. まずはじめに発散積分を, 相対論的不変性や理論の持つ対称性をこわさないようにしながら有限化, つまり**正則化** (regularize) する. これには**次元正則化** (dimensional regularization) が最も広く用いられる. 次に**相殺項** (counterterm) と波動関数のくりこみ因子を導入し, 正則化の処理を無くしたときに発散を生じる項を取り除いてしまう. 結果が一意に決定されるという要請から, 理論のくりこみ可能性に対する基準が得られる.

非摂動的に解けない限り量子効果の評価には必ずくりこみがともなうので, くりこみ可能性は理論が量子論として一貫したものとして成立するかどうかの基準になる. ここでいう量子効果とは, 量子系での物理量と対応する古典系での物理量との差のことである. 例えば量子系では相互作用の強さが**有効結合定数** (effective coupling constant) として運動量に依存するようになる [19]. このような量子効果は系の非線形性から予期される.

このようなくりこみを行ってはじめて理論と観測量を関係づけることができる．散乱断面積や粒子の寿命を通して物理的に測られる遷移要素は，摂動級数から計算される頂点関数やプロパゲーターであらわされるので，逆にこれらの観測量を用いて，対応する頂点関数にあらわれる結合定数や粒子の質量を定義する．例として電荷素量 e を考えよう．これは古典的には距離を固定した二つの**静止した**電子の間に働く力から決められる．一方量子論的には，散乱断面積や電磁放射を計算し，電子の運動量に応じてそれらの観測量と計算結果が一致するように決められる．これは**有効結合定数**と呼ばれる．有効結合定数の値は，異なる運動量ごとに異なる実験により決められるが，それら異なる運動量での**スケーリング**は，ひとたび理論の任意定数が全部固定されると理論的に予言されるべきものだ．

例として前節で出た $\phi^3/3!$ のスカラー理論を考える（ただし，ここではこの理論の不安定性については問わない）．任意定数としては，結合定数 g と質量 m^2 の2つがある．摂動展開により，頂点関数やプロパゲーターを g のある次数まで計算する．ある理論を実際の物理系のモデルとするには，その理論による予想値を観測値と一致させなければならない．この要請から摂動展開で用いられる g や m の値が決まる．自由場の場合からの類推から，2点関数のフーリエ変換の極は観測される粒子の質量のところにあらわれると考えられ，この質量を m_{ph} と表す．式にすると次のようになる．

$$G^{-1}(p^2 = m_{\rm ph}^2) = 0\,. \tag{8.113}$$

ここで m_{ph}^2 はもちろん有限な量で，安定な粒子に対しては実数でないといけない．同様にさらにもう一つ観測値があると g が決まる．これには外線の運動量がゼロの3点の頂点関数を含む過程について測定するとよい．

$$\tilde{A}(0,0,0) = g_{\rm ph}\,. \tag{8.114}$$

これらのパラメータの値が決まると，他のあらゆる n 点関数が任意の運動量であいまいさ無しに決まるはずである．もし決まらないならば，さらに他の

パラメータが必要となり, その理論は**くりこみ不可能** (nonrenormalizable) ということになる. (8.113) と (8.114) の条件は, ϕ^3 理論における**くりこみ条件** (renormalization conditions) である.

もしも頂点関数や n 点関数の摂動級数が発散を一切含まないならば, ここで言う手続きは, 以下のようにごく素直に行われる. この場合 n 点関数の値は, 一般に作用にあらわれる r 個のパラメータを含んだ振舞いのよい収束する級数であらわされる. ある運動量で得られた適当な n 点関数について, r 個のくりこみ条件が課せられ, それらが満たされるように r 個のパラメーターが固定される. 以上の手続きは, **有限くりこみ** (finite renormalization) に対応する.

しかしたいていの理論では, n 点関数の摂動表示に発散があらわれるため, さらに別の問題とあいまいさが生じる. これについて調べるために ϕ^3 についての結果 (8.76) を思い出そう. もとの結合定数 g について $O(g^2)$ で, プロパゲーターの逆は自己エネルギーにより次のように変化を受ける.

$$G^{-1}(p^2) = p^2 - m^2 - \Sigma(p^2, m^2, g^2)\ . \tag{8.115}$$

ここで Σ は, **もとの**パラメータの m や g について発散した関数である.

この Σ は発散しているので, まず一時的にこれを有限にする形式的な手続きを用いて**正則化**しなければならない. 正則化自体は古典論の範囲でも電磁気学であらわれる. 一対の電荷があるときの静電場の持つエネルギーを計算する際, 空間積分について積分区間の下限に**カットオフ** (cutoff) を入れる必要が生じる [20]. 今の場合も正則化の一つの方法としてΣ の運動量積分の上限にカットオフを入れるというやりかたがある. これによって積分が有限になるとき, もとの発散を**紫外発散** (ultraviolet divergence) とよぶ. 運動量積分の下限から発散があらわれる場合もあり, そのようなとき理論は**赤外発散** (infrared divergence) を持つと言う. この発散は理論がゼロ質量の粒子を含むときに生じる. 経路積分は赤外発散を処理する上で優れた道具となる [14] が, これについては以降この節と次章で簡単に触れるのみとする. 当然のこ

とだが, 計算の最後にはカットオフは**押し上げられる**. つまり無限大にもっていかれるのであるが, その途中までは発散に対するこの取り扱いはよく定義されたものである. 積分にカットオフを入れるやり方の不都合な点は, それがダイアグラムの有限部分についてはポアンカレ不変性などの対称性が壊れるというところにある. そのため, 大抵の計算では次元正則化の方法が用いられるので, この節では以下この方法で議論する.

ϕ^3 理論において, 正則化された自己エネルギーは

$$\Sigma(p^2, m^2, g^2) = \Sigma_d(p^2, m^2, g^2) + \Sigma_f(p^2, m^2, g^2) \tag{8.116}$$

とあらわされる. ここで発散項 Σ_d は一意的に決まるもので, いま正則化の手続きによって一時的に有限化されている. Σ_f は自己エネルギーの残りの部分に対応し, 正則化がなされていなくても有限な部分である. 自己エネルギーの場合, くりこみの手続きは**質量相殺項**, $-\delta m^2\phi^2$ を**相互作用として**導入することによって行なう. この相殺項は, 8.7図 のように理論に新しい裸のバーテックスを持ち込む. 以下 (8.76) で与えられた $O(g^2)$ までで Σ をくりこむ.

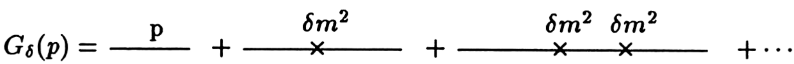


図8.7　質量相殺項によるプロパゲーターの補正

容易にわかるように, このバーテックスの寄与は 2 点関数の摂動表示に, もとの自己エネルギーをあらわすダイアグラムと同様に幾何級数として入ってくる. だから 2 点関数は

$$G^{-1}(p^2) = p^2 - m^2 - \Sigma_d(p^2, m^2, g^2) - \Sigma_f(p^2, m^2, g^2) - \delta m^2 \tag{8.117}$$

となる. よってプロパゲーターが $p^2 = m_{ph}^2$ で極を持つことを要請すると

$$m_{\rm ph}^2 - m^2 - \Sigma_d(m_{\rm ph}^2, m^2, g^2) - \Sigma_f(m_{\rm ph}^2, m^2, g^2) - \delta m^2 = 0 \tag{8.118}$$

となる. この関係が正則化の手続きを除いても成り立つためには, 自己エネルギーの発散部分を質量相殺項によって取り除いてやらねばならない. これ

は $O(g^2)$ で

$$\delta m^2 = -\Sigma_d(m_{\rm ph}^2, m^2, g^2) + g^2 C \tag{8.119}$$

とすればよい. ここで C は有限だが**任意の**数である. よって (8.118) の関係式は,

$$m_{\rm ph}^2 - m^2 - \Sigma_f(m_{\rm ph}^2, m^2, g^2) - g^2 C = 0 \tag{8.120}$$

となるが, これは m_{ph}, g, C で書かれた, m^2 に対するよく定義された方程式であると思われる. ここで C を

$$g^2 C = -\Sigma_f(m_{\rm ph}^2, m_{\rm ph}^2, g^2) \tag{8.121}$$

と選ぶことにより, いつでも $m_{ph} = m$ ととることができるが, 必ずしもこうする**必要はない**. $C = 0$ と選ぶと δm^2 は自己エネルギーの発散部分を取り除くのみとなる. このような選び方は**最小引算法** (minimal subtraction) とよばれる. 自己エネルギーの引き算の方法は, 古典レベルで一対の電荷があるとき, 対となっているために余分に生じる静電エネルギーを有限量として導くために行なう引き算と似ている [20].

通常 $m^2 + \delta m^2 = m_0^2$ は**裸の質量** (bare mass) と呼ばれる. 裸の質量は C にはよらない. このことは (8.119) と (8.120) をあわせた式

$$m_0^2 = m_{\rm ph}^2 - \Sigma_d(m_{\rm ph}^2, m^2, g^2) - \Sigma_f(m_{\rm ph}^2, m^2, g^2) \tag{8.122}$$

からわかる. Σ それ自身が g^2 に比例するということから, 上式中の m^2 に含まれる $g^2 C$ に比例する部分は裸の質量に対して $O(g^4)$ の補正しか与えず, 今くりこみを行なっている $O(g^2)$ までででは無視される. くりこみの手続きはこの次数まで首尾一貫したものとなっている.

こうしてプロパゲーターの逆は

$$\begin{aligned} G^{-1}(p^2) &= p^2 - m^2 - g^2 C - \Sigma_f(p^2, m^2, g^2) \\ &\quad - \left[\Sigma_d(p^2, m^2, g^2) - \Sigma_d(m_{\rm ph}^2, m^2, g^2)\right] \end{aligned} \tag{8.123}$$

となる. 残念なことに発散の問題は質量のくりこみだけでは解決されない.

$$\Sigma_d(p^2, m^2, g^2) - \Sigma_d(m_{\rm ph}^2, m^2, g^2) \tag{8.124}$$

という量が $p^2 \neq m_{ph}^2$ において依然発散している可能性がある. もしそうなら, あらゆる p 積分が無意味になってしまうが, この発散も今の場合取り除くことができる. Σ_d が正則化されているとき, その p^2 に関する m_{ph}^2 のまわりでの級数展開はよく定義されていて, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\Sigma_d(p^2, m^2, g^2) - \Sigma_d(m_{\rm ph}^2, m^2, g^2) \quad = \quad & (p^2 - m_{\rm ph}^2)\left.\frac{\partial \Sigma_d}{\partial p^2}\right|_{p^2 = m_{\rm ph}^2} \\ & + \Sigma_R(p^2, m_{\rm ph}^2, m^2, g^2). \end{aligned} \tag{8.125}$$

ここで $p^2 - m_{\rm ph}^2$ の 2 次以上の項は Σ_R とあらわされ, 正則化を取り除いても**有限**であると仮定する. 従って $\Sigma_R(p^2 = m_{\rm ph}^2) = \frac{\partial}{\partial p^2}\Sigma_R(p^2 = m_{\rm ph}^2) = 0$ である. プロパゲーターの逆は

$$G^{-1}(p^2) = p^2 - m^2 - g^2 C - (Z-1)(p^2 - m_{\rm ph}^2) - \Sigma_R - \Sigma_f \tag{8.126}$$

とあらわされる. ここで Z は

$$Z - 1 = \left.\frac{\partial \Sigma_d}{\partial p^2}\right|_{p^2 = m_{\rm ph}^2} \tag{8.127}$$

と定義され, 正則化を取り除くと**明らかに**発散する.

この発散は, ラグランジアンに質量相殺項以外に, さらに次の相殺項も加えることにより取り除かれる.

$$\mathcal{L}_c = \frac{1}{2}(Z-1)\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \; - \frac{1}{2}(m^2 + \delta m^2)(Z-1)\phi^2;. \tag{8.128}$$

これらは再び 2 点関数に幾何級数を加えることになり, 和をとることができる. 1 番目の項は p^2 項に対する補正を与える. こうして最終的にプロパゲーターは

$$G^{-1}(p^2) = p^2 - m^2 - g^2 C - \Sigma_R - \Sigma_f + O(g^4) \tag{8.129}$$

となる. (8.128) から明らかなように, 裸のラグランジアン $\mathcal{L}_0$ は

$$\mathcal{L}_0 = Z(\mathcal{L} - \frac{1}{2}\delta m^2 \phi^2) \tag{8.130}$$

となるので, G^{-1} の極の位置を変えずに, 留数だけを1に変える. これで場は正しくくりこまれたことになる.

> **例題8.16**: (8.129) を確かめよ

この相殺項も含めたラグランジアンを**裸の場** $Z\phi$ をもちいてあらわすと, もとのラグランジアンと同じ形になる. 結局以上の手続きは系のラグランジアンを, 正しく規格化された2点関数を持つ**くりこまれた場**ϕ で展開したことに相当する. Z はこれら2つの場を関係づけるもので, くりこまれた (衣を着た) 場の中に裸の場を見い出す確率をあらわす. Z は定義式 (8.127) から以下のように求められる. Z は $1 + O(g^2)$ なので(8.127) の両辺にさらに Z をかけ, $O(g^2)$ までをとると,

$$1 - Z = Z \left.\frac{\partial \Sigma_d}{\partial p^2}\right|_{p^2 = m_{\mathrm{ph}}^2} \Rightarrow Z = \left(1 + \frac{\partial \Sigma_d}{\partial p^2}\right)^{-1} \tag{8.131}$$

となる. これは大変恣意的な変形ではあるが, 正則化を取り除くと $Z \to 0$ になるので, その意味から考えて適当と思われる.

これまでに導入された相殺項は, もともと作用に含まれていた項と非常に形が似ている. これは相殺項がもとのラグランジアンで適当に場を再規格化し, 定数を定義しなおすことにより得られるべきものだからだ. もとのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \tfrac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{3!} g \phi^3 \tag{8.132}$$

で与えられる. くりこみの手続きにおいて, (8.132) にある場や定数は裸の場 ϕ_B , 裸の結合定数 g_B , 裸の質量 m_B として理解される. これらは**くりこまれた**場 ϕ , パラメーター g , m^2 と次の式で関係付けられる.

$$\phi_B = \sqrt{Z}\phi, \;\; g_B = g + \delta g, \;\; m_B^2 = m^2 + \delta m^2 \,. \tag{8.133}$$

(8.133) を (8.132) に代入すると, 基本ラグランジアンとして

$$\mathcal{L}_B = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 \,, \tag{8.134}$$

相互作用項として

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I \quad = \quad & \tfrac{1}{2}(Z-1)\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}\delta m^2\phi^2 \\ & - \tfrac{1}{2}(m^2+\delta m^2)(Z-1)\phi^2 - \frac{1}{3!}(g+\delta g)Z^{3/2}\phi^3 \end{aligned} \tag{8.135}$$

が得られる. この簡単なモデルを g^2 の次数まででくりこむのに要する項は, この (8.135) にすべて含まれている. 全次数までくりこむのにこれらの相殺項で十分であることを示すのは本書の範囲を越えることである [18]. 自己エネルギーのくりこみで生じた任意定数 g^2C は, 裸の質量を m^2 と δm^2 に分ける分け方の任意性から生じるものとみなされる. δm^2 は発散項さえ取り除けばよいので, これらの項は常に有限量だけずらすことが可能である. この一個のパラメーターによる異なるくりこみ条件の組は**くりこみ群** (renormalization group) として知られる. 裸の質量が, もしそれを m^2 と δm^2 に分ける分け方に依ってしまうなら, その理論はくりこみ不可能なのである.

このような手続きは理論をくりこむのに一般的な方法だ. もし (8.135) のように定義される一組の相殺項がすべての発散を除くのに適当でないなら, すなわち他の相殺項がいるような場合, その理論は摂動論的にくりこみ不可能ということになる. 理論がくりこみ可能かどうか判断する基本的な基準は, **次数勘定**によって得られる. 以下これについて議論する. まず頂点関数やプロパゲーターに対する摂動による補正項は, 摂動の任意の次数でもとの頂点関数やプロパゲーターに等しい次元を持っていなければならないということに注目する. 例えばスカラー場のプロパゲーターに対する自己エネルギー補正は (長さ)$^{-2}$ すなわち (質量)^2 の次元を持たねばならない. 一般の頂点関数 Γ の持つ長さの次元を $D(\Gamma)$ とあらわす. 摂動による補正項は常に結合定数と運動量積分の積の形であらわれるということに注目する. 各次数の項で, 運動量積分の次元 $\delta(\Gamma)$ がゼロ以下のとき, その積分は紫外発散する. 積分において

分子にあらわれる運動量の次数の方が分母の次数以上になるからだ. そのような場合, カットオフを上げていったときに少なくとも対数的な発散があらわれる. 一方各項で結合定数が担う次元を $C(\Gamma)$ とすると $D(\Gamma) = C(\Gamma) + \delta(\Gamma)$, すなわち次の結果を得る.

$$\delta(\Gamma) = D(\Gamma) - C(\Gamma). \tag{8.136}$$

$D(\Gamma)$ は固定されているので, 運動量積分の次元についての振舞いは結合定数の持つ次元のみから決まってしまう. 正の次元を持つ結合定数があると, $C(\Gamma)$ は高次の摂動項ではいくらでも大きくなれる. そのときには摂動の次数を上げるに従って紫外領域でより高次の発散を持つ運動量積分があらわれる. このような場合, プロパゲーターへの補正である自己エネルギーは p^2 の高次の項の係数までが発散してしまう. これをくりこもうとすると場の高次の微分を含んだ無限個の相殺項が必要となる. だからなんらかの "奇跡的な打ち消し合い" がない限り, 理論が正の次元の結合定数を持つと, 無限個の相殺項を決めるのに無限個のくりこみ条件が必要となる. 従って物理量に対する予測力が失われ, 意味のない理論となってしまう. このような場合理論はくりこみ不可能という. またこの議論で正の次元を持つ結合定数がない理論がくりこみ可能であるということが完全に示されたわけではない.

例えば4次元のスカラー場は (長さ)$^{-1}$ の次元を持つので, スカラー場の n 点の結合定数は (長さ)$^{(n-4)}$ の次元を持つことになる. 結果として $n>4$ だと結合定数は正の次元を持ち, 理論はくりこみ不可能となる.

例題 8.17: 2次元のスカラー理論では, 任意の巾の相互作用があっても, くりこみ可能であることを しめせ.

非可換ゲージ理論の場合には少し複雑になる. というのも同じ結合定数がローレンツ・ゲージで3種類, 物質場が入っている場合には4種類の相互作用にあらわれるからだ. 物質場を除いて考えると, 基本ラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \tfrac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \partial_\mu \bar{c}^a \, \partial^\mu c^a \end{aligned} \tag{8.137}$$

となり, 相互作用項は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I &= \tfrac{1}{4}(Z_3 - 1)(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} Z_1 \, g f^a_{bc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) A^{b\mu} A^{c\nu} \\ &\quad + \tfrac{1}{4} Z_4 \, g^2 f^a_{bc} f^a_{de} A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu} A^{e\nu} \\ &\quad - (\tilde{Z}_3 - 1) \, \partial_\mu \bar{c}^a \, \partial^\mu c^a + \tilde{Z}_1 \, g f^a_{bc} A^{a\mu} \partial_\mu \bar{c}^b \, c^c \end{aligned} \tag{8.138}$$

となる. あとは摂動補正を計算し, それらを正則化し, 補正が有限になるようにくりこみ定数 $Z_1, Z_3, Z_4, \tilde{Z}_3, \tilde{Z}_1$, を定義すればよい. 実際にこの計算を行なうのは本書の範囲を越えている [2,18]. これらの相互作用項はもとの裸のラグランジアンを次のように規格を取り直すと得られる.

$$\begin{aligned} &A^{a\mu}_B = \sqrt{Z_3}\, A^{a\mu}, \quad \bar{c}^a_B = \sqrt{\tilde{Z}_3}\, \bar{c}^a, \\ &c^a_B = \sqrt{\tilde{Z}_3}\, c^a, \quad g_B = Z_1 {Z_3}^{-3/2} g . \end{aligned} \tag{8.139}$$

また, $\frac{1}{2}(\partial_\mu A^{a\mu})^2$ の項には補正がないのでくりこみを受けないことに注意を要する. これらのことが矛盾せずに成り立つためには,

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} \tag{8.140}$$

という関係が成立していなければならない. (8.140) の関係はスラフノフ・テイラー (Slavnov-Taylor) 恒等式 [21] と呼ばれ, 経路積分の BRST 不変性から得られるワード・高橋恒等式により導かれる. こうして非可換ゲージ理論は (8.139) で定義される**乗法的くりこみ**の処方で有限化される [22]. 物質場を含んだ非可換ゲージ理論についても同様の結果が得られる.

ここで前節で得られた, 対数発散する ϕ^3 理論の自己エネルギー,

$$\Sigma(p) = \tfrac{1}{2} i g^2 \hbar \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \tag{8.141}$$

に対して, 次元正則化[23,24]の手続きを具体的に見てみる[18]. 次元正則化では, 発散積分を任意の非整数 n 次元のユークリッド時空に形式的に拡張することにより, 発散積分を正則化する. すると発散は物理的に意味のある次元, $n=4$ における極としてあらわされる. この手続きは, 計算する量の性質が時空の次元によってしまうときには破綻してしまう. 例えば, γ_5 行列の定義 $\gamma_5=\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ の任意の非整数次元への拡張は容易でない. しかし実際は大抵の場合, この次元正則化のテクニックが適用できる.

実際に (8.141) であらわされる自己エネルギーを計算してみよう. ユークリッド領域で計算を行ない, 最後に再びミンコフスキー領域に解析接続することにより結果を得る. 以下, $k_0=ik_E^0, p_0=ip_E^0$ というとり方をしている(k_E^0, p_E^0 は実数） ので, 積分測度は $d^nk\to id^nk$ となり, また $k^2,p^2\le 0$ となることに注意しよう. まず, プロパゲーターを,

$$\frac{1}{(m^2-p^2-i\epsilon)}=\int_0^\infty da\ \exp\{-a(m^2-p^2-i\epsilon)\} \tag{8.142}$$

と書き換え, 積分順序を交換すると

$$\begin{aligned}\Sigma(p) \quad = \quad & -\frac{\hbar g^2\mu^{(4-n)}}{2(2\pi)^n}\int_0^\infty da\int_0^\infty db\int d^nk\ \exp\Big\{-(a+b)m^2 \\ & +bp^2+2bp\cdot k+(a+b)k^2\Big\}\end{aligned} \tag{8.143}$$

となる. ここで μ は質量の次元を持つ定数である. n次元時空では結合定数は全体として (長さ)$^{n/2-3}$ の次元を持ち, その2乗は(長さ)$^{n-6}$ の次元を持つ.

例題8.18: n 次元時空で結合定数は (長さ)$^{n/2-3}$ の次元を持つことをしめせ.

任意定数 μ を導入することによって (8.143) に入っている定数 g は依然4次元時空のときと同じ (長さ)$^{-1}$ の次元を持つことができる. しかし μ は完全に任意である. $n=4$ としたときには μ の指数はゼロになるので, これらの操作は一見無意味に思える. しかし後にみるように, 発散積分は $n=4$ に

極を持つので, μ のとり方こそが積分値のスケーリングと深く関わってくるのである. これは特に質量ゼロの理論で顕著である.

積分 (8.143) は, 積分変数を $k^\mu \to k^\mu + p^\mu b/(a+b)$ とずらす（これは積分範囲から許される）と, 変数 $z = a+b, x = a/z$ を用いて,

$$\Sigma = -\frac{\hbar g^2 \mu^{(4-n)}}{2(2\pi)^n} \int_0^1 dx \int_0^\infty dz\, z \int d^n k \, \exp\{-z[m^2 - p^2 x(1-x)] + zk^2\} \tag{8.144}$$

となる. ユークリッド領域での k 積分は公式

$$\int d^n k \, \exp(zk^2) = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{n/2} \tag{8.145}$$

を用いて行なうことができ,

$$\Sigma = -\frac{\hbar g^2 \mu^{(4-n)}}{2(4\pi)^{n/2}} \int_0^1 dx \int_0^\infty dz\, z^{(1-n/2)} \exp\{-z[m^2 - p^2 x(1-x)]\} \tag{8.146}$$

を得る. **一般の実数を**引数に持つガンマ関数の積分表式

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dx\, e^{-x} x^{\alpha-1} \tag{8.147}$$

を使うと z 積分もできて,

$$\Sigma = -\frac{\hbar g^2 \mu^{(4-n)}}{2(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \, \left[m^2 - p^2 x(1-x)\right]^{(n/2-2)} \tag{8.148}$$

を得る.

もとの積分にあった発散はガンマ関数の原点での極としてあらわれる. ガンマ関数が原点で極を持つことは, 関係式 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ と$\Gamma(1) = 1$ から容易にわかり, $n = 0$ の近傍ではガンマ関数は次のような漸近形を持つことが知られている.

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n} - \gamma_E + O(n)\,. \tag{8.149}$$

ここで $\gamma_E = 0.577\ldots$ はオイラー定数である.

自己エネルギーについて, 最小引算法によるくりこみを行なう. 発散部分は明らかにガンマ関数の極の部分のみなので, 質量相殺項を

$$\delta m^2 = \frac{\hbar g^2}{32\pi^2} \frac{1}{\left(2 - \frac{n}{2}\right)} \tag{8.150}$$

ととれば取り除くことができる. $n \to 4$ の極限をとるときは少し注意を要する. これは $(n-4)$ の最低次で次のようになることからみてとれる.

$$\begin{aligned}
&\left[m^2 - p^2 x(1-x)\right]^{(n/2-2)} \to 1 + \left(\frac{n}{2} - 2\right) \ln\left[m^2 - p^2 x(1-x)\right] \\
&\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \to \frac{1}{2 - \frac{n}{2}} - \gamma_E \\
&\mu^{(4-n)} \to 1 - \left(\frac{n}{2} - 2\right) \ln \mu^2
\end{aligned} \tag{8.151}$$

これらの積の極限は, 各項の極限の積とは異なり, ガンマ関数が極を持つことから消えずに残る項が生じる. 最小引算法でくりこまれた自己エネルギーの最終結果は, 次のようになる.

$$\Sigma = \frac{\hbar g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln\left[\frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{\mu^2}\right] + \gamma_E \right\} . \tag{8.152}$$

例題 8.19: (8.152) を確かめよ.

驚くべきことに, くりこまれた自己エネルギーの中には任意定数 μ が残ってしまう. もちろん散乱断面積や粒子の寿命などの物理量は, この全く任意にとれる定数によってはならない. このことから以下のようにして微分方程式が導かれる. σ をある観測にかかる物理量とすると, σ はμ, g, m を決めると一意的に決まり, これらのパラメーターを用いてあらわされる. したがってこれが μ にはよらないということは

$$\mu \frac{d\sigma}{d\mu} = 0 \tag{8.153}$$

とあらわされる. これより次の微分方程式が得られる.

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g,m) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m(g,m) \frac{\partial}{\partial m^2}\right) \sigma = 0 . \tag{8.154}$$

ここで連鎖微分則を用いた. 係数は

$$\beta(g,m) = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} , \quad \gamma_m(g,m) = -\mu \frac{dm^2}{d\mu} \tag{8.155}$$

となる. (8.154) , (8.155) が, 最も簡単な**くりこみ群**方程式で**キャラン・シマンチーク** (Callan-Symanzik) 方程式と呼ばれる [25]. これらの方程式はくりこまれたパラメーター g や m が, その有限部分に任意性を持つことを表しており, それらが μ を通して互いに関連付けられることを要請する. 実際の応用は, 以下のように行なう. 例えば ϕ^3 理論の場合, g_B と g , m_B^2 と m^2 の関係がくりこみを行なうと決められる. それらの関係式を μ で微分して (8.155) と比べると関数 β と γ_m が決定される. この β を使って (8.155) を解けば g の μ 依存性が求まる. それらから方程式 (8.154) が決定され, σ のスケーリングが得られる.

ゼロ質量の理論では, くりこみ群方程式 (8.154) が簡単に解け, g のスケーリングがユークリッド運動量の関数として求まる. 実際, μ^2 のスケーリングに対する応答は, 常に p^2 のスケーリングに対する応答にやき直すことができる. 例えば, ϕ^3 理論のくりこまれた自己エネルギーは, $m^2 = 0$ のとき

$$\Sigma = \frac{\hbar g(\mu)^2}{32\pi^2} \left[\ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) + \gamma_E - 2 \right] \tag{8.156}$$

で与えられる. ここで $p^2 \to \lambda p^2$ とスケールすることは, ちょうど $\mu^2 \to (\lambda)\mu^2$ ととり直すことに関係している. 従って g の μ 依存性さえ求まれば, p^2 を大きくしたときの様々な物理量の振舞いは, μ を大きくしたときの g の振舞いのみからくりこみ群を使って決められる. 実はくりこみ群方程式というのは, 摂動の高次の効果の一部分を結合定数のスケーリングに押し込んでしまうという働きをしている.

ゼロ質量の理論をくりこむときに, 質量のスケール μ を導入する必要があるのは, この理論が赤外発散を含んでいるためである. $p^2 = 0$ とすると赤外領域で対数発散する積分が生ずる. もちろんゼロ質量の理論において $p^2 = 0$ というのはまさに質量殻上にあたる. このような別種の発散を含んでいる以上, ダイアグラムを質量殻上においてくりこむわけにはいかない. このような困難は, 例えばゼロ質量の非可換ゲージ理論などにおいて生じる. こういった場合にも質量殻外でならばくりこみを行なうことができ, その際に質量の

スケール μ がくりこみを行なうスケールとして導入されるのである. ここでも物理的な振幅が質量スケール μ によってはならないという要請からくりこみ群方程式が得られる. $\beta(g)$ が求まると, (8.155) から, μ の関数としての結合定数の振舞いは次のように得られる.

$$\int_{g_0}^{g} dg\, \beta^{-1}(g) = \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) . \tag{8.157}$$

ここで g_0 は $\mu=\mu_0$ における結合定数の値である. 対数関数において同時に $\mu \to \infty, p^2 \to \infty$ とスケールさせると, 対数自身はスケール不変となることから, 漸近領域での有効結合定数の振舞いが得られる. 大きな p というのはフーリエ変換を通じて小さな x と結び付いているので, 有効結合定数のスケーリングは, 理論の短距離の振舞いを明らかにする. このような議論によって, QCD の有効結合定数が高いユークリッド運動量でゼロに近付く, ということが最初に示された. この現象は, **漸近的自由性** (asymptotic freedom) として知られる [26]. このことは, QCDは強い相互作用を記述する理論ではあるが, 高いユークリッド運動量ではクォークとゲージ場との結合がなくなってゆくことを意味する. そのため, 深非弾性散乱の振幅などの, 物理的に有意義なユークリッド領域の過程をQCDの枠内で摂動論的に計算することが可能となる. もちろん有効結合定数は, $p^2 \to 0$ になるに従って大きくなる. そこでは摂動論が使えなくなるので, 赤外領域での振舞いに摂動論による結果を適用することはできない. 漸近的自由性を,QCDについてしめすのは本書の水準をこえている [2] が, 易しいモデルについては 9.7 節でしめすことにする.

最後に, 後の応用のため, くりこみ条件を有効ポテンシャルによってあらわすやり方について述べる. ϕ^3 理論について, 質量はプロパゲーターの逆をゼロ運動量で指定することによってくりこむ.

$$\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\phi_0)}{\partial {\phi_0}^2} = m^2 . \tag{8.158}$$

結合定数のくりこみ条件も, ゼロ運動量での 3 点関数の値を決めることによ

り得られ, 有効ポテンシャルを用いると

$$\frac{\partial^3 V_{\mathrm{eff}}(\phi_0)}{\partial {\phi_0}^3} = g \tag{8.159}$$

とあらわされる. 次章では, ϕ^4 理論について, これらに対応するものを述べる.

参考文献

[1] 摂動論が誤った結果を出す例としてよく述べられるものとして, $\lambda\phi^4$ の相互作用項を持つ一成分スカラー理論がある. この理論は3次元もしくは4次元時空で, 自由場の理論と等価になるという意味で, 自明な理論であるということがしめされている. このことは, まさに低いオーダーの摂動論と矛盾している. 自明性についての最初の証明は, M.Aizenmann, Phys. Rev. Lett. **47**, 1(1981); J.Fröhlich, Nucl. Phys. B200 [FS4], 281 (1982) にある.

[2] 例えば, C. Itzykson and J.B.Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York,1980; G.Ross, *Grand Unified Theories*, Benjamin-Cummings, Menlo Park, California,1985; P.Ramond, *Field Teory: A Modern Primer,Second Edition*, Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989 参照.

[3] J.Schwinger, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **37**, 452 (1951); J.Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951); J.Schwinger, *Particle and Sources*, Gordon and Breach, New York, 1969.

[4] K.Symanzik, Z.Natürforschung **9A**, 10 (1954).

[5] G.Jona-Lasinio, Nouvo Cimento **34**, 1790 (1964).

[6] これらのテクニックについての初期のレヴューとしては, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Teory, 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics*, ed. S.Deser, M.Grisaru,

H.Pendelton, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1970 の中の B.Zumino によるレクチャーがある.

[7] 複合演算子の場合への有効作用の拡張についての議論は, J.M.Cornwall, R.Jackiew, and E.Tomboulis, Phys. Rev.**D10**, 2428 (1974) に見られる.

[8] C.Becchi, A.Rouet, R.Stora, Ann. Phys. **98**, 289 (1976); I.V.Tyutin, Lebedev preprint, FIAN No.39 (1975), 未出版.

[9] J.C.Ward, Phys. Rep.**77**, 2931 (1950); Y. Takahashi, Nuovo Cimento **6**, 370 (1957).

[10] L. Baulieu, Phys. Rep. **129**, 1 (1985).

[11] N.Nakanishi and I.Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, World Scientific, Singapore, 1990.

[12] 例えば, G.Barton, *Introduction to Advanced Field Theory*, New York, 1963; J.D.Bjorken and S.D.Drell, *Relativistic Quantum Fields*, New York, 1965.

[13] R.P.Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).

[14] QEDの赤外発散の取り扱いに関連して, ラグランジアンが2次形式になっていなくて, しかも厳密に解ける例がある. M.S.Swanson, Phys. Rev. **D28**, 798 (1983) 参照.

[15] このようなゲージ・パラメーターの利用については, G.Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **59**, 1067 (1987) に見られる.

[16] F.J.Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949); J.Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452 (1951).

[17] H.Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947); F.J.Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1947); A.Salam, Phys. Rev. **82**, 217 (1951).

[18] J.C.Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984. [2] にある文献も参照のこと.

[19] 有効結合定数のスケーリングについての初期の論文に, E.C.G.Stuekelberg and A.Peterman, Helv. Phys. Acta **26**, 499 (1953); M.Gell-Mann and F.E.Low, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954) がある.

[20] ジャクソン著「電磁気学」吉岡書店.

[21] A.A.Slavnov, Teoret. i Mat. Fiz. **10**, 99 (1972); J.C.Taylor, Nucl. Phys. **B33**, 436 (1971).

[22] 非可換ゲージ理論がくりこみ可能であることの最初の証明は, G.'t Hooft and M.Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972); *ibid.* **B50**, 318 (1972) にある. ゲージ理論の経路積分法によるくりこみは, B.W.Lee and J.Zinn-Justin, Phys. Rev. **D5**, 3121 (1972) に議論されている.

[23] 次元正則化は最初, [22] の論文, およびC.G.Bollini and J.T.Giabidgi, Phys. Lett. **B40**, 566 (1972); J.F.Ashmore, Nouvo Cimento Lett. **4**, 289 (1972) で用いられた.

[24] 次元正則化のテクニックについての優れたレヴューとしては, G.Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **47**, 849 (1975) がある.

[25] C.Callan, Phys. Rev. **D2**, 1542 (1970); K.Symanzik, Comm. Math. Phys. **18**, 227 (1970).

[26] QCDにおける漸近的自由性の概念は, G.'t Hooft, Report at Conference on Lagrangian Field Theories, Marseille, 1972; D.J.Gross and F.Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); H.D.Politzer, Rev. Lett. **30**, 1346 (1973) で初めて議論された.

第9章　非摂動的な結果

この章では, 経路積分を用いて場の理論の非摂動効果について議論する. 場の理論は無限個の自由度を持つため, 量子力学とはかなり異なる. 6.1 節で最初にみた連続場の理論は, まさに無限個の調和振動子の集まりから極限をとったものであった. 自由度無限個の物理系では, 量子化の際にユニタリー同値でない複数の表現があらわれる可能性がある. エネルギーは縮退しているが. 互いに直交している複数の基底状態があるような場合がそうで, 基底状態の性質はダイナミクスにより決まる. これは, 4.5 節で量子力学系について述べた対称性の自発的破れの概念を場の理論に拡張したもので, 一つ以上のスカラー場もしくはスピノルの複合場がゼロでない真空期待値を持つことにより特徴付けられる.

4.5 節の量子力学の場合, 2 つの基底状態は本当は直交しておらず, 真空の間のトンネル現象が起こり得た. しかし場の理論の場合は縮退した真空が本当に直交する. 対称性の自発的破れには二つの重要な側面がある. 一つ目は, このメカニズムを利用して, スカラー場に結合している他の場に質量を与えることができるということだ. 特にゲージ場は, このメカニズムで質量を得ていると考えると大変都合がよい. この理論以外で質量を持つくりこみ可能なゲージ理論を構成するのは非常に難しいからである. 二つ目の側面とは, ゴールドストーン (Goldstone) の定理のことである. この定理によると, 場または場の複合演算子がゼロでない真空期待値を持つことによって連続な対称性が破れると, 必ずゴールドストーン・ボソンと呼ばれるゼロ質量の粒子が現れる. 現実の世界では, これに対応するゼロ質量ボソンはないので, こ

のメカニズムによって質量を説明するというアプローチは駄目に見える．ところがこの困難な状況は，不要なゴールドストーン・ボソンが質量を持つベクトル・ゲージボソンの縦波成分に吸収されるという，ヒッグス・キッブル (Higgs-Kibble) 機構によって救われる．

以下，9.1 節では有効作用を用いてゴールドストーンの定理を証明する．9.2 節では有効ポテンシャルの方法でスカラー場がゼロでない真空期待値を持つための条件を求める．9.3 節ではヒッグス・キッブル機構を述べるために，可換ゲージ場と複素スカラー場を含んだ理論における対称性の自発的破れについて調べる．9.4 節では，それの非可換ゲージ理論への拡張であるグラショウ・ワインバーグ・サラム (Glashow-Weinberg-Salam) 理論について議論する．9.5 節では，経路積分を使ってカイラル・アノマリーを導き，指数定理の一例として議論する．9.6 節では運動方程式の古典解の役割について，経路積分を用いて議論する．特にソリトン解や，インスタントンとして知られるユークリッド時空での古典解について述べる．最後に 9.7 節では，有効ポテンシャルを使って対称性のダイナミカルな破れと有限温度での対称性の回復について述べる．

9.1 ゴールドストーンの定理

8.2 節でしめしたように，理論に対称性があると，グリーン関数の間に一連の恒等式が成り立つ．それらは有効作用の汎関数微分の形で与えられた．ゴールドストーンの定理はこれらの恒等式から帰結されるものである．

簡単のため，一組のスカラー場 ϕ^a （a はアイソスピンをあらわす）のみからなる理論を考え，あるリー群 G の作用で不変であるとし，場が構成する表現空間における G の生成子の表現行列を T^i_{ab} とあらわす．スカラー場の変換は通常通り，$\phi' = U\phi$ で与えられる．無限小変換は，

$$\delta\phi^a = i\Lambda^j T^j_{ab}\phi^b \tag{9.1}$$

となる. Λ^j は任意の無限小量である.

有効作用もこの変換で不変なので,

$$\Gamma[\,\phi_0^a\,] = \Gamma[\,\phi_0^a + \delta\phi_0^a\,] \tag{9.2}$$

である. ここで, ϕ_0^a は ϕ^a の真空期待値をあらわす. これについて汎関数級数展開を行ない, Λ^j が任意であることを用いると直ちに, この群の生成子の数に等しい数の恒等式が得られる.

$$\int d^4x\,\phi_0^b(x)\,T^i_{ab}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_0^a(x)} = 0\,. \tag{9.3}$$

これをさらに汎関数微分すると,

$$T^i_{ac}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_0^a(y)} + \int d^4x\,\phi_0^b(x)\,T^i_{ab}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_0^a(x)\delta\phi_0^c(y)} = 0\,. \tag{9.4}$$

8.1 節でしめしたように, Γ の 2 階微分は**フルの**プロパゲーターの逆になっているので,

$$-\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_0^a(x)\delta\phi_0^c(y)} = \Delta^{-1}_{ac}(x-y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,G^{-1}_{ac}(p^2)e^{ip(x-y)} \tag{9.5}$$

となる. ただし,

$$\Delta_{ac}(x-y) = \langle 0|\;T\{\phi_a(x)\phi_c(y)\}\,|0\rangle\;. \tag{9.6}$$

理論の真の真空では, (9.4) 式の第一項目は (8.8) 式よりゼロになる. 以降ゼロでない真空期待値は定数とし, 並進対称性を保っているとする. すると (9.5) は,

$$G^{-1}_{ab}(p^2=0)\,T^i_{bc}\phi_0^c = 0 \tag{9.7}$$

となる.

8.4 節の議論から明らかなように, $-G^{-1}_{ab}(p^2=0)$ はプロパゲーターの極の位置をあらわす. それゆえ $-G^{-1}_{ab}(p^2=0)$ は系にあらわれる粒子の**質量行列** (mass matrix) を与える. 物理的に観測される励起にともなう質量は, この質

量行列をアイソスピン空間の中で対角化すると得られる．もし，ϕ_0^a の中でゼロでない値を持つものがあれば，表現の既約性から，

$$u_b^i = T_{bc}^i \phi_0^c \neq 0 \tag{9.8}$$

となる生成子 $\mathbf{T^i}$ が必ず存在する．(9.7) 式から明らかなように，u_b^i は質量行列の**ゼロ**固有値の固有ベクトルをなす．このように多重項 ϕ_0^a を不変にしない独立な生成子の組があり，各生成子によって独立な方向に ϕ_0^a が回されるとすると，その各生成子が，それぞれ**破れた**対称性に対応し，その数だけゼロ質量の粒子があらわれる．これがゴールドストーンの定理である [1].

9.2 有効ポテンシャル

ゴールドストーンの定理における議論はスカラー場が真空期待値を持つメカニズムについては何も述べていない．また，場の理論の真空の構造をみるには，4.5 節で量子力学について，8.1 節で場の理論について述べた，有効ポテンシャル [2] の方法が適している．有効ポテンシャルはその定義通り，運動量をゼロにした頂点関数から構成することもできるが，経路積分を用いる方が ずっと簡単に求まる．

簡単ため最初は一成分のスカラー理論について考える．ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi) \tag{9.9}$$

の形をとるとする．ただし $V(\phi)$ は質量項も含んでいるとする．もしϕ がゼロでない真空期待値を持つならば，経路積分の端点での値にその影響があらわれる．コヒーレント状態の間の遷移要素は 6.8 節で導いたように，

$$Z_{ab}[J] = \int_{\phi_a,\pi_a}^{\phi_b,\pi_b} \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\pi\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,\left[\tfrac{1}{2}\dot{\phi}\pi - \tfrac{1}{2}\dot{\pi}\phi - \mathcal{H} + J\phi\right]\right\} \tag{9.10}$$

である．経路の端点で ϕ や π がゼロでないときは，$\dot{\pi}\phi$ の項を部分積分して作用を通常の形であらわす際，この端点の値に依存する位相因子が生じるた

め注意を要する．コヒーレント状態による経路積分の性質から，これら端点での値はちょうど場とその共役運動量の真空期待値であった．

しかし，この部分積分による位相は，場の真空期待値が定数，すなわち $\pi_a = \pi_b = 0$ となる場合やin状態の真空とout状態での真空で等しい値をとって $\pi_b\phi_b - \pi_a\phi_a = 0$ となる場合には生じない．この節ではin状態とout状態の波動汎関数は等しいとし，$\phi_a = \phi_b = \phi_0, \pi_a = \pi_b = 0$ とする．このような場合運動量積分が出来て次のような結果となる．

$$Z[J] = \int_{\phi_0(x_-)}^{\phi_0(x_+)} \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x(\mathcal{L}(\phi) + J\phi)\right\} . \tag{9.11}$$

ここで $\phi_0(x_\pm)$ は始状態，終状態での真空期待値をあらわす．積分変数を $\phi(x) \to \phi(x) + \phi_c(x)$ と置き換えることによって，この積分の端点での値は作用の中に組み込まれる．ここで ϕ_c は $\phi_c(x_\pm) = \phi_0(x_\pm)$ の境界条件のもとでの，運動方程式

$$\Box\phi_c(x) + \frac{\partial V(\phi_c)}{\partial\phi_c(x)} = J(x) \tag{9.12}$$

の解である．結局，経路積分は

$$Z[J] = \int_0^0 \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left[\mathcal{L}(\phi + \phi_c) + J(\phi + \phi_c)\right]\right\} \tag{9.13}$$

となる．通常これは作用を ϕ_c のまわりで展開し，鞍点法によって評価する．端点での値から今の場合部分積分は表面項を生じない．作用は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi + \phi_c) + J(\phi + \phi_c) \quad &= \quad \mathcal{L}(\phi_c) + J\phi_c - \phi\left(\Box\phi_c + \frac{\partial V(\phi_c)}{\partial\phi_c} - J\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}\phi^2\frac{\partial^2 V(\phi_c)}{\partial{\phi_c}^2} - \cdots \end{aligned} \tag{9.14}$$

となる．上の式で，$\cdots$ は ϕ について3次以上の項およびくりこみに要する相殺項をあらわす．(9.12) の運動方程式から，(9.14) の ϕ に1次の項はなくなる．

$$\frac{\partial^2 V(\phi_c)}{\partial{\phi_c}^2} = V''(\phi_c) \tag{9.15}$$

のようにあらわすと, 経路積分は近似的に

$$Z[J] \approx \int_0^0 \mathcal{D}\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi_c) + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \right.\right.$$
$$\left.\left. -\tfrac{1}{2}V''(\phi_c)\,\phi^2 + J\phi_c\right]\right\} \tag{9.16}$$

となる. これをユークリッド空間に接続し, ϕ 積分を行うと

$$Z[J] \approx N\det\left[\Box_E + V''(\phi_c)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{\hbar}\int d^4x\,[\mathcal{L}_E(\phi_c) + J\phi_c]\right\} \tag{9.17}$$

を得る. N は ϕ_c によらない定数である. (9.17) にあらわれている行列式は容易に評価できる. しかしながら (9.17) の結果は, 4.5 節で量子力学の場合について述べたような問題点もある. すなわちガウス近似は2次の項の係数が正である限りは妥当ではあるが, ϕ_0 の値によってはその条件が満たされないことがあるということだ. したがって有効ポテンシャルのガウス近似を, この2次の近似が妥当でない領域にまで拡張する場合は解析接続として考えるべきで, その結果はかならずしも信用できるものではない.

少し話はそれるが重要なことがらをしめしておく. 有効作用を一定の外場項 $J(x) = j$ に対して考えることにする. 生成汎関数 $W[J]$ は変数 j の関数 $W[j]$ となり, 次の式が容易にしめされる.

$$\frac{\partial^2 W[j]}{\partial j^2} = \langle \left(\int d^4x\,\phi(x)\right)^2 \rangle - \left(\langle \int d^4x\,\phi(x)\,\rangle\right)^2 \tag{9.18}$$

ここで, $\langle\cdots\rangle$ は汎関数期待値をあらわす. 任意の α について成り立つ不等式

$$\langle \left(\alpha - \int d^4x\,\phi(x)\right)^2 \rangle \geq 0 \tag{9.19}$$

で, α に適当な値を代入することによって (9.18) の右辺が負になることがしめされ, すなわち

$$\frac{\partial^2 W[j]}{\partial j^2} \leq 0 \tag{9.20}$$

となる. 8.1 節でみたように, 有効作用の2階微分は W の2階微分の逆数で, また有効作用と有効ポテンシャルの関係から

$$\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\phi_0)}{\partial {\phi_0}^2} \geq 0 \tag{9.21}$$

と結論される. (9.21) の結果は, 近似なしの**本当の**有効ポテンシャルは ϕ_0 について下に凸な関数でなければならないということをしめしている [3].

有効作用に対する近似式は (9.17) の結果をミンコフスキー空間に解析接続し, 8.1 節で与えた定義に入れると得られる.

$$\Gamma[\phi_0] = -i\hbar \ln Z[J] - \int d^4x\, J\phi_0$$
$$\approx \int d^4x\, \left[\mathcal{L}(\phi_c) + J(\phi_c - \phi_0)\right] + \tfrac{1}{2} i\hbar\, \ln\det\left[\Box + V''(\phi_c)\right] \,. \quad (9.22)$$

鞍点法は有効作用の $O(\hbar)$ のオーダーまでの近似を与える.

$J=0$ に対応する系の有効ポテンシャルは ϕ_c と ϕ_0 を定数とすると得られる. ϕ_c が定数ということは, ϕ_c は in 状態と out 状態を結ぶものなので, 結局は常に $\phi_c = \phi_0$ となっているということである. (9.22) の対数項を評価しよう. これはユークリッド時空で容易にできて, 有効ポテンシャルは

$$V_{\text{eff}}(\phi_0) \int d^4x = V(\phi_0) \int d^4x + \tfrac{1}{2}\hbar \ln\det\left[\Box_E + V''(\phi_0)\right] \quad (9.23)$$

となる. ここでの体積要素はユークリッド空間でのものなのでミンコフスキー空間でのものの i 倍である. この行列式の対数は 1.4 節でみちびいたエルミートな微分演算子に関する恒等式を用いて

$$\det D = \exp\left\{\sum_j \ln\lambda_j\right\} \;\Rightarrow\; \ln(\det D)^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}\sum_j \ln\lambda_j \quad (9.24)$$

のように求まる. λ_j は D の固有値である. 今の場合

$$\lambda_j = p_E^2 + V''(\phi_0) \quad (9.25)$$

となる. j についての和は通常のように p についての積分にかわる. ユークリッド時空の体積を L^4 と書くと,

$$\sum_j = \lim_{L\to\infty} \frac{L^4}{(2\pi)^4} \sum_j \frac{(2\pi)^4}{L^4} \to \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad (9.26)$$

となる．こうして時空の体積積分が出てくるので，有効ポテンシャルの定義によりその分を割ると，有効ポテンシャルのなかで (9.22) の対数項からくる分は

$$V_1 = \frac{1}{2}\hbar \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln\left[p_E^2 + V''(\phi_0)\right] \tag{9.27}$$

とあらわされる．

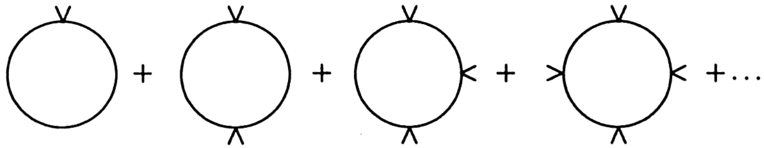


図 9.1　有効ポテンシャルに効く 1 ループダイアグラム

この $O(\hbar)$ の寄与は実は

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{2}\phi^2 V''(\phi_c) \tag{9.28}$$

の形をした頂点からつくられる，9.1 図のようなユークリッド時空での 1 ループ・ダイアグラムで，外線運動量をゼロにしたものの和となっている．組合わせによる各ダイアグラムにかかる重みまで含めてこの和が (9.27) に等しいことをみるのは少し複雑である [4]．外線の運動量をゼロにした頂点関数というのは，閉じたループダイアグラムを考えると得られる．一般に有効ポテンシャルをダイアグラムを用いて $\hbar$ の級数展開として得るには，$\phi \to \phi + \phi_c$ の置き換えをしたときの作用からつくられる閉じたループの和をとればよい．8.3 節で述べたように，ループの数は $\hbar$ の次数に対応するので，ダイアグラムが有効ポテンシャルのどの次数に寄与するかを決める．同様に有効ポテンシャルにあらわれる $V(\phi_0)$ はゼロ・ループ，すなわちツリーダイアグラムの和として理解できる．

(9.27) にあらわれる積分は発散するので，くりこみが必要となる．物理的に意味があるのは (9.27) を ϕ_0 で微分したものなので，ϕ_0 によらない項は無視してよい．この積分は運動量にカットオフ Λ を入れることによって正則化

する. $M^2 = V''(\phi_0^2)$ とおくと, $k_0 = \omega$ 積分により

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\ln(\omega^2+k^2+M^2) =$$
$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{1}{2}\sqrt{k^2+M^2} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left\{\omega\ln(\omega^2+k^2+M^2)-2\omega\right\}\Big|_{-\Lambda}^{\Lambda} \quad (9.29)$$

を得る.

> **例題 9.1**: (9.29) の右辺の 2 番目の積分は $\Lambda\to\infty$ の極限で M^2 によらず, したがって捨ててもよいことをしめせ.

球座標系を用い, 一番目の積分についてカットオフ Λ をいれて k 積分を行うと次のようになる.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\hbar}{32\pi^2}\Bigg[2\Lambda^4\left(1+\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)^{3/2} - M^2\Lambda^2\left(1+\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)^{1/2} \\ &\quad - M^4\ln\left(\Lambda+\Lambda\sqrt{1+\frac{M^2}{\Lambda^2}}\right) + \tfrac{1}{2}M^4\ln M^2\Bigg]. \end{aligned} \quad (9.30)$$

(9.30) の結果を M^2/Λ^2 の級数として展開し, $\Lambda\to\infty$ の極限で消える項を落とすと,

$$V_1 = \frac{\hbar\Lambda^4}{16\pi^2} + \frac{\hbar\Lambda^2M^2}{16\pi^2} + \frac{\hbar M^4}{64\pi^2}\ln\left(\frac{M^2}{4\Lambda^2}\right) \quad (9.31)$$

となる. 一番目の項は M によらないので取り除くと, 正則化した有効ポテンシャルは最終的に次のようになる.

$$V_{\text{eff}}(\phi_0) = V(\phi_0) + \frac{\hbar\Lambda^2}{16\pi^2}V''(\phi_0) + \frac{\hbar}{64\pi^2}\left[V''(\phi_0)\right]^2\ln\left(\frac{V''(\phi_0)}{4\Lambda^2}\right). \quad (9.32)$$

ここでポテンシャルが

$$V(\phi) = \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 + \tfrac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (9.33)$$

で与えられる場合に限って議論する. (9.33) のポテンシャルで記述される理論は空間次元が 3 のとき, S行列が単位行列になるという意味で自明な理論になっていることがしめされている [5]. 要するに結合定数が高次のくりこみ

の効果のためにゼロになるのである．したがって，一成分のスカラー場のみを含む理論に限れば(9.33) であたえられるポテンシャルは純粋に形式的なものである．しかしスカラー場がゲージ場のような他の場と結合している場合には，理論は自明なものとはならないと広く信じられており，そのような一般的な場合にはここで得た有効ポテンシャルの表式は意味のあるものとなる．

有効ポテンシャルはくりこみ条件，

$$\left.\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\phi_0)}{\partial {\phi_0}^2}\right|_{\phi_0=0} = m^2\,, \quad \left.\frac{\partial^4 V_{\text{eff}}(\phi_0)}{\partial {\phi_0}^4}\right|_{\phi_0=0} = 6\lambda \tag{9.34}$$

を課すことによりくりこまれる．これらのくりこみ条件はもとのポテンシャル(9.33) の形に対応している．（ $\frac{1}{4!}\lambda\phi^4$ ではなく $\frac{1}{4}\lambda\phi^4$ となっていることに注意.）ここで (9.33) にあらわれる $V(\phi_0)$ は裸のラグランジアンから生じるものなので，その中に含まれる質量，結合定数はそれぞれ裸の質量，裸の結合定数だ．一方1ループ補正にあたる $V''(\phi_0)$ にはくりこまれた質量，結合定数のみが含まれている．これは，1ループ補正を計算したとき，質量や結合定数や波動関数の相殺項からの寄与は高次の補正にあたり，(9.14) のガウス近似では無視したからだ．また，この近似のレベルでは波動関数のくりこみを行なう必要はない．

裸の質量と裸の結合定数はそれぞれ $m_0^2 = m^2 + \delta m^2, \lambda_0 = \lambda + \delta\lambda$ とあらわされる．有効ポテンシャル (9.32) は次式を用いて評価される．

$$\begin{aligned} V(\phi_0) &= \tfrac{1}{2}(m^2 + \delta m^2)\phi_0^2 + \tfrac{1}{4}(\lambda + \delta\lambda)\phi_0^4\,, \\ V''(\phi_0) &= m^2 + 3\lambda\phi_0^2\,. \end{aligned} \tag{9.35}$$

いささか退屈ではあるが，素直に計算すればくりこみ条件 (9.34) は次のようにとると満たされることがわかる．

$$\begin{aligned} \delta m^2 &= -\frac{3\hbar}{32\pi^2}\left[4\lambda\Lambda^2 + 2\lambda^2 m^2 \ln\left(\frac{m^2}{4\Lambda^2}\right) + \lambda m^2\right]\,, \\ \delta\lambda &= -\frac{9\hbar\lambda^2}{32\pi^2}\left[2\ln\left(\frac{m^2}{4\Lambda^2}\right) + 3\right] \end{aligned} \tag{9.36}$$

(9.36) を有効ポテンシャルのもとの式に代入し, $\Lambda \to \infty$ の極限をとると, くりこまれた有効ポテンシャルがえられる.

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\phi_0) &= \tfrac{1}{2}m^2\left(1-\frac{3\hbar\lambda}{32\pi^2}\right){\phi_0}^2+\tfrac{1}{4}\lambda\left(1-\frac{27\hbar\lambda}{32\pi^2}\right){\phi_0}^4 \\ &\quad +\frac{\hbar}{64\pi^2}(m^2+3\lambda{\phi_0}^2)^2\ln\left(1+\frac{3\lambda{\phi_0}^2}{m^2}\right). \end{aligned} \tag{9.37}$$

m^2 と λ が正で, λ が小さいとすると（実際それは高次の項が無視出来るための条件になっている）, 有効ポテンシャル (9.37) は $\phi_0 = 0$ で極小になる. しかし $m^2 = -\mu^2, \mu^2 > 0$ のときは, 極小の有効ポテンシャルを与えるのは $\phi_0 = 0$ ではない. このことはツリー近似のみが残る $\hbar \to 0$ の極限では自明である. このとき極小点は,

$$\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm\sigma \tag{9.38}$$

の 2 点がある. また, 粒子の質量は真の真空での 2 階微分の値によって与えられ,

$$\left.\frac{\partial^2 V(\phi_0)}{\partial{\phi_0}^2}\right|_{\phi_0=\pm\sigma} = 2\mu^2 \tag{9.39}$$

となる. いまの場合は, もともと理論は連続の対称性を持たず, $\phi \to -\phi$ の離散的な対称性しか持たないので, ゴールドストーン・ボソンは生じない. 場はどちらか一方の真空期待値の周りで振動するので, この離散的対称性は壊れてしまっている. 実際この破れた真空での有効相互作用は

$$\mathcal{L}_I = \pm\sqrt{\mu^2\lambda}\,\phi^3 + \tfrac{1}{4}\lambda\phi^4 \tag{9.40}$$

で与えられ, $\phi \to -\phi$ の対称性はなくなっている.

ここで得た有効ポテンシャルは明らかに下に凸にはなっていない. ここで重要なことは, 2 つのコヒーレント状態 $|\sigma\rangle$ と $|-\sigma\rangle$, そしてそれらの基底状態に対応した調和振動近似で得られる状態は直交しているということである.

例題 9.2: 状態間の内積についての 6.8 節の結果を使って, $\langle\sigma|-\sigma\rangle = 0$ をしめせ.

また, これらの2つの状態のエネルギーは縮退していて, $\langle\sigma|\,H\,|\sigma\rangle = \langle-\sigma|\,H\,|-\sigma\rangle = E_0$ である. この縮退と直交性から, 容易に別の規格化された縮退した状態,

$$|\phi_0\rangle = \alpha^{\frac{1}{2}}\,|\sigma\rangle + (1-\alpha)^{\frac{1}{2}}\,|-\sigma\rangle \tag{9.41}$$

が作られる. ここで α は0から1の間の任意の数である. この状態での場の期待値は

$$\langle\phi_0|\,\phi\,|\phi_0\rangle = (1-2\alpha)\sigma \tag{9.42}$$

となる. すなわち真空期待値が $-\sigma$ から σ までの値をとるエネルギーの縮退した状態が連続して存在する. このことから有効ポテンシャルの凸性についての矛盾は, ϕ_0 の小さいところでガウス近似がうまくいかないことによるものと考えられる. 標準的な解決法は V_{eff} をマックスウェル流に構成することで, これによると V_{eff} はσ と $-\sigma$ の間のすべての点で定数 $V_{\text{eff}}(\sigma)$ となる [6,7].

他のタイプの場があると有効ポテンシャルにはさらにそれらの場からの寄与が加えられる. 例としてスピノルのラグランジアンが次のように与えられているとする.

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - g\phi\bar{\psi}\psi \tag{9.43}$$

これはローレンツ不変で, スピノル場とスカラー場の間の**湯川結合** (Yukawa vertex) として知られる非線形の相互作用をあらわす. スカラー場を ϕ_0 だけずらし, 場の高次の項を捨てると有効作用へのフェルミオンの寄与は経路積分から

$$V_f(\phi_0)\int d^4x = i\hbar\ln\int_0^0 \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m - g\phi_0)\psi\right\} \tag{9.44}$$

となる. この積分はおなじみのテクニックであるユークリッド時間への解析接続をし, グラスマン積分をすれば得られる. 定数項を落とすと, 有効ポテン

シャルへのフェルミオン部分からの寄与は

$$V_f(\phi_0)\int d^4x = -\hbar \ln\det(i\not{\partial}_E - m - g\phi_0) \tag{9.45}$$

となる. ボソンの場合は行列式には $-\frac{1}{2}$ の指数がついていたが, フェルミオンの場合はこの指数は1になる. 恒等式 (1.65) を使い, $M_f = m + g\phi_0$ とおくと対数項は汎関数テイラー級数を用いて,

$$\begin{aligned}\ln\det(i\not{\partial}_E - m - g\phi_0) &= \mathrm{Tr}\ \ln(i\not{\partial}_E - M_f)\\ &= \mathrm{Tr}\ \ln(i\not{\partial}_E) + \mathrm{Tr}\ \ln\left(1+\frac{iM_f}{\not{\partial}_E}\right)\\ &= \mathrm{Tr}\ \ln(i\not{\partial}_E) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-iM_f)^n}{n}\mathrm{Tr}\,\frac{1}{(\not{\partial}_E)^n}\end{aligned} \tag{9.46}$$

とあらわされる. ここでトレースは時空の引数に対してとスピノルの足に対しての両方についてとるものとする. 一つめのトレースは ϕ_0 によらないのでいまは落としてもよい. 二つめのトレースをとるには,

$$\frac{1}{(\not{\partial}_E)} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\not{p}_E}{{p_E}^2}e^{ip(x-y)} \tag{9.47}$$

の表示を用いるとよい. 6.8.4 節で導入されたユークリッド時空のスピノルを用いると,

$$\mathrm{Tr}\,{\not{p}_E}^n = \begin{cases} 4(p_E^2)^{n/2} & n\ \text{が偶数のとき}\\ 0 & n\ \text{が奇数のとき.}\end{cases} \tag{9.48}$$

この結果と時空の引数についてのトレースの規則とをあわせると, n が偶数のとき

$$\mathrm{Tr}\,\frac{1}{(\not{\partial}_E)^n} = \int d^4x\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{4}{(p_E^2)^{n/2}} \tag{9.49}$$

であり, 奇数のときはゼロとなることがわかる. ユークリッド時空の全体積で全体を割ると定義から有効ポテンシャルが次のように得られる.

$$\begin{aligned}V_f(\phi_0) &= 4\hbar\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{(-iM_f)^n}{n\,(p_E^2)^{n/2}}\\ &= -2\hbar\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \ln(p_E^2 + M_f^2)\ .\end{aligned} \tag{9.50}$$

この節で前に取り扱ったおなじみの積分が再びあらわれるが, 今回は負の係数をともなっている. 正則化の方法はスカラーのときと同じだ. くりこむ前の式は, 重要でない項を省くと次のように与えられる.

$$V_f(\phi_0) = -\frac{\hbar\Lambda^2 {M_f}^2}{4\pi^2} - \frac{\hbar {M_f}^4}{16\pi^2} \ln\left(\frac{{M_f}^2}{4\Lambda^2}\right) . \tag{9.51}$$

ボソンの場合と同じく (9.50) の結果は,

$$\mathcal{L}_f = -M_f\bar{\psi}\psi \tag{9.52}$$

であらわされる頂点から作られるフェルミオンの1ループ・ダイアグラムの和であることをしめすことができる. この2つの場合の有効ポテンシャルをくらべると面白いことがわかる. それはフェルミオン・ループはダイアグラムの中でボソン・ループと逆の符号で入ってくるということだ. このメカニズムのおかげで超対称性のある理論では, フェルミオンとボソンの自由度が等しくなっていることにより, 発散が和いでいる. つまり超対称性のある理論では, フェルミオン・ループにおける発散項とボソン・ループにおける発散項が同じ大きさで逆の符号を持つ. また, 非可換ゲージ理論の摂動級数で, ゲージ場のループにおける（理論のユニタリーティーを脅かす）負のノルムの寄与をファデーエフ・ポポフ・ゴーストによるフェルミオン・ループが相殺するのも同様のメカニズムである

ゲージ場も ϕ の有効ポテンシャルに寄与する. 次節で述べるヒッグス・キッブル機構が働く場合はこれに相当する. $U(1)$ ゲージ不変な複素スカラー場のラグランジアンは, 問題 7.3 で取り扱ったように,

$$\mathcal{L} = D_\mu^*\phi^* D^\mu\phi - V(\phi^*, \phi) - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{9.53}$$

である. 共変微分 D_μ は次式で与えられる.

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \tag{9.54}$$

しばらくの間, ラグランジアンの中のスカラー場のみからなるポテンシャル項を V とあらわす. スカラー場がもしある複素定数 ϕ_0 だけずれると, ずら

したラグランジアンの中には $e^2|\phi_0^2|A_\mu A^\mu$ というベクトル場の質量項があらわれる.

有効ポテンシャルへのゲージ場の寄与を求めるのに再び鞍点法を用いる. 有効ポテンシャルの定義より, この寄与はファインマン・ゲージの経路積分で,

$$V_g(\phi_0)\int d^4x =$$
$$i\hbar\ln\int_0^0 \mathcal{D}A\,\delta(\partial_\mu A^\mu)\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,\tfrac{1}{2}A_\mu(\Box+M_g^2)A^\mu\right\} \tag{9.55}$$

とあらわされる. ここで $M_g^2 = 2e^2|\phi_0|^2$ である. この積分の評価は8.3 節で行なったローレンツ・ゲージでのプロパゲーターを導くときの計算とほとんど同じだ. M_g^2 によらない項を落とすと, ユークリッド時空での経路積分は

$$V_g(\phi_0)\int d^4x = \tfrac{1}{2}\hbar\mathrm{Tr}\,\ln(\delta_{\mu\nu}+M_g^2\Delta^E_{\mu\nu}) \tag{9.56}$$

となる. ここでユークリッド時空でのローレンツ・ゲージのプロパゲーターは,

$$\Delta^E_{\mu\nu} = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{k_E^2}-\frac{k_\mu k_\nu}{k_E^4}\right)e^{ik(x-y)} \tag{9.57}$$

である. これは微分演算子 $\delta_{\mu\nu}\Box_E-\partial_\mu\partial_\nu$ の逆演算子で, $g_{\mu\nu}$ がユークリッド時空では $\delta_{\mu\nu}$, また k^2 が $-k_E^2$ になることに注意すれば得られる. (9.56) のトレースは時空の引数のみならず, ローレンツの足についても和をとっている.

> **例題 9.3**: (9.56) を確かめよ.

このトレースは, 対数関数に汎関数の級数展開を行い, 各項に対してトレースの恒等式,

$$\mathrm{Tr}\,\left(\Delta^E_{\mu\nu}\right)^n = 3\int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{k_E^2}\right)^n \tag{9.58}$$

を用い, 再び和をとると,

$$\mathrm{Tr}\,\ln(\delta_{\mu\nu}+M_g^2\Delta^E_{\mu\nu}) = 3\int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\ln(k_E^2+M_g^2) \tag{9.59}$$

となる．最終的には

$$V_g(\phi_0) = \tfrac{3}{2}\hbar \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(k_E^2 + M_g^2) \tag{9.60}$$

となる．ここで再びおなじみの積分があらわれる．正則化したのちは以下のようになる．

$$V_g(\phi_0) = \frac{3\hbar\Lambda^2 M_g^2}{16\pi^2} + \frac{3\hbar M_g^4}{64\pi^2} \ln\left(\frac{M_g^2}{4\Lambda^2}\right) \tag{9.61}$$

最後に，これまでの結果をスカラー場，スピノル場，ゲージ場が複数入っている場合に一般化する．実スカラー場の多重項の場合，場をずらすことによって次のような 2 次のラグランジアンがあらわれる．

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^a - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 V(\phi_0)}{\partial\phi_0^a\,\partial\phi_0^b}\phi^a\phi^b\,. \tag{9.62}$$

よって，

$$M_{ab} = \frac{\partial^2 V(\phi_0)}{\partial\phi_0^a\,\partial\phi_0^b} \tag{9.63}$$

の成分を持つ質量行列 $\mathbf{M}$ が生じる．この行列がエルミートであるとすると，ユニタリー変換 $\mathbf{U}$ を用いて対角化することによって鞍点法が使える．測度はこの変換で不変なので，経路積分は質量行列を対角化する各モードについての経路積分の積に還元される．$\mathcal{M}_a^2$ を M の固有値とすると，それらは場の真空期待値の複雑な関数となる．これを用いるとスカラー場による有効ポテンシャルは正則化したかたちで

$$V_s(\phi_0) = V(\phi_0) + \sum_a \left[\frac{\hbar\Lambda^2\mathcal{M}_a^2}{16\pi^2} + \frac{\hbar(\mathcal{M}_a^2)^2}{64\pi^2}\ln\left(\frac{\mathcal{M}_a^2}{4\Lambda^2}\right)\right] \tag{9.64}$$

となる．トレースの性質を考慮すれば (9.64) は次のように書ける．

$$V_s = V(\phi_0) + \mathrm{Tr}\left[\frac{\hbar\Lambda^2\mathbf{M}}{16\pi^2} + \frac{\hbar\mathbf{M}^2}{64\pi^2}\ln\left(\frac{\mathbf{M}}{4\Lambda^2}\right)\right]\,. \tag{9.65}$$

同じような結果が理論に含まれる他の場からの寄与についても得られる．例えば一般化された湯川相互作用，

$$\mathcal{L}_I = -G_{jk}^a\phi^a\bar{\psi}^j\psi^k\,, \tag{9.66}$$

があり, スピノルはもともと質量がないとすると, スピノルによる正則化された有効ポテンシャルは,

$$V_s = -\mathrm{Tr}\left[\frac{\hbar\Lambda^2\mathbf{M}_f\mathbf{M}_f^\dagger}{4\pi^2} + \frac{\hbar(\mathbf{M}_f\mathbf{M}_f^\dagger)^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mathbf{M}_f\mathbf{M}_f^\dagger}{4\Lambda^2}\right)\right] \tag{9.67}$$

となる. ここで $\mathbf{M}_f$ は成分が

$$(\mathbf{M}_f)_{jk} = G^a_{jk}\phi^a_0 \tag{9.68}$$

となっており, エルミート行列とする.

ゲージ場からの寄与を一般化するには, (9.53) を非可換ゲージのラグランジアンに拡張すればよい. 複素スカラー場の多重項 ϕ^a について共変微分は,

$$D_\mu = \delta_{ab}\partial_\mu + igT^j_{ab}A^j_\mu \;\equiv\; \partial_\mu + igA_\mu \tag{9.69}$$

と与えられる. T^j は適当なリー群のエルミートな生成子だ. ゲージ不変なスカラー場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_s = D^\dagger_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi \tag{9.70}$$

である. スカラー場を定数 ϕ^a_0 ずらすと, 次のようなゲージ場についての質量項が生じる.

$$g^2\left(\phi^{c*}_0 T^k_{ca}T^j_{ab}\phi^b_0\right)A^j_\mu A^{k\mu} \;\equiv\; \tfrac{1}{2}M^2_{jk}A^j_\mu A^{k\mu}\ . \tag{9.71}$$

ゲージ場の質量行列を $\mathbf{M}_g$, その成分を M^2_{jk} と定義すると, ゲージ場による有効ポテンシャルは以下のようになる.

$$V_g(\phi_0) = \mathrm{Tr}\left[\frac{3\hbar\Lambda^2\mathbf{M}_g}{16\pi^2} + \frac{3\hbar{\mathbf{M}_g}^2}{64\pi^2}\ln\left(\frac{\mathbf{M}_g}{4\Lambda^2}\right)\right]\ . \tag{9.72}$$

9.3 ヒッグス・キッブル機構

前節でみたように, ゲージ場はそれが結合しているスカラー場が自発的に対称性を壊しているような場合に質量項を持つことができる. ゲージ場の質

量項は一見手で加えてもよさそうにみえるのに, これまでずっと質量ゼロとしてきた. その理由についてここでみてみよう. もし質量項を手で入れたとすると, ベクトル場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \tag{9.73}$$

となる. このゲージ固定項を入れていない段階では, 運動方程式は

$$\left[g_{\mu\nu}(\Box + m^2) - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = 0\,. \tag{9.74}$$

この運動方程式を満たすベクトル場はプロカ・ボソンと呼ばれている. (9.73) において明らかに質量項がゲージ不変性を壊している. その結果一般化されたワード・高橋恒等式が成り立たなくなり, 系統的なくりこみが行なえなくなる.

運動方程式 (9.74) からプロカ・プロパゲーターが得られる. これまで取り扱った理論において, プロパゲーターは微妙な拘束条件を除いては, 運動方程式で場の1次の項にある微分演算子の逆として得られた. (9.74) にあらわれている微分演算子の正則化されていない逆は,

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{g_{\mu\nu}}{k^2-m^2} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2(k^2-m^2)}\right)e^{ik(x-y)} \tag{9.75}$$

となる. これが本当に逆になっていることをみるには, 次式を示せばよい.

$$\left[(\Box + m^2)g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu\right]\Delta^{\nu\rho}(x-y) = \delta^\rho{}_\mu \delta^4(x-y)\,. \tag{9.76}$$

このプロパゲーターを見れば, プロカ・ボソンが相互作用する場になるのが難しいことがわかる. つまり, このプロパゲーターのフーリエ変換は $k \to \infty$ で定数になり, プロカ・ボソンを含む理論のくりこみは大変難しくなることが予想される. プロパゲーターにあらわれる質量の逆は, 長さで言うと正の次元を持った結合定数と同じような効果を与える. その結果プロカ・ボソンと結合する場の自己エネルギーは任意に高い発散次数を持ってしまい, 奇跡的な打ち消し合いがないかぎりくりこみ不可能となってしまうわけだ.

しかし実際の物理系には, カレントが質量を持つベクトル場と結合しているモデルでうまく記述できるものがある. 例えばハドロンの弱い相互作用による崩壊（中性子が陽子と電子と反ニュートリノに崩壊する過程等）がそれである. これらの過程では左巻きのニュートリノ（右巻きの反ニュートリノ）しかあらわれず, パリティ不変性が破れている. 現象論的な場の理論で初期にしめされたモデルでは, 弱い相互作用はフェルミのカレント・カレント相互作用 [8],

$$\mathcal{L}_I = -G_f J_w^\mu J_{w\mu} \tag{9.77}$$

で記述される. J_w^μ は弱カレントをあらわす. 観測されるパリティ非保存を記述するには一部の場のカレントは左巻きになっていなければならない. 例えば中性子の崩壊は一般に次式のカレント・カレント結合で引き起こされると考えられる.

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{\sqrt{2}} G_F (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1-\gamma_5)\psi_\nu) \,. \tag{9.78}$$

ここで添え字の n, p, e, ν は, それぞれ中性子, 陽子, 電子, ニュートリノをあらわす. 自由場による摂動展開から (9.78) の相互作用が中性子の 1 粒子状態と陽子, 電子, ニュートリノの 3 粒子状態とを結び付けることがわかる. ここには 6.3 節で導入されたカイラル射影の演算子 $1-\gamma_5$ が含まれているので, この相互作用には左巻きのニュートリノしか関与できない.

(9.78) にあるフェルミ結合定数 G_F は (長さ)^2 の次元を持つため, 8.4 節で行なった次数勘定によりこの理論はくりこみ可能でないことがわかる. 一方運動量空間で見たとき, フェルミのカレント・カレント結合はプロカ・プロパゲーターを介したカレント・カレント結合の低エネルギー極限ととてもよく似ている. これをみるには, フェルミ結合の形と, 8.3 節でファインマン則を求めたときと同様にベクトル場を外場と結合させたときの形と比べるとよい. 経路積分でプロカ場について積分して得られる有効相互作用は

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^4x\, d^4y\, J^\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \,. \tag{9.79}$$

となる. これは運動量空間では,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^4p\, \tilde{J}^{\mu}(p)\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p)\tilde{J}^{\nu}(-p) \,. \tag{9.80}$$

低エネルギー状態を結び付ける極限では $p \simeq 0$ なのでプロカ・プロパゲーターは $\simeq m^{-2}$ になる. 従って, もしフェルミ相互作用が弱カレントとプロカ・ボソンの結合の低エネルギー極限であるならば, その結合の強さは無次元の数因子を除いてプロカ・ボソンの質量から決まる. この場合フェルミ結合は $gJ^{\mu}_{w}A_{\mu}$ の形の頂点に置きかえられる. A_{μ} はプロカ・ボソンをあらわす. 残念なことに, この節の最初の議論から, プロカ・ボソンが質量を持つと理論はくりこみ不可能となる. したがって, もとのフェルミ頂点の理論から計算上はなんの進歩もない.

ここで対称性の自発的破れの方法を導入するとどうなるか見てみよう. スカラー場と結合するベクトル場のゲージ不変な理論があるとき, ベクトル場がもともと質量を持たないならばこの理論はくりこみ可能である. 頂点関数は $\phi_0 = 0$ の場合に計算され, くりこみの手続きで有限になる. 有効作用を級数展開することによってこれらの頂点関数から $\phi_0 \neq 0$ 場合の頂点関数が得られる. よってこの理論が $\phi_0 \neq 0$ でもくりこみ可能と思われる. 一方このとき場をずらすことによりベクトル場の質量項が生じるため, 理論はプロカ・ボソンを記述することになる. 結局, 質量のないゲージ場の理論で対称性の自発的破れが起こると, 質量を持ったプロカ・ボソンを含むくりこみ可能な理論となるのである [9].

しかしこれで何もかもうまくいくという訳ではない. 9.1 節で述べたゴールドストーンの定理によれば, ゲージ対称性という連続対称性が破れているために, 質量ゼロのゴールドストーン・ボソンが生じる. ゼロ質量のスカラー粒子は観測されていないので, このメカニズムは現実のモデルには使えないように思われる. しかし幸運なことに, ゴールドストーンの定理には抜け道がある. たしかに質量ゼロのスカラー粒子が生じるのは避けられない. しかし, それらのモードが明白に共変的な形式での非物理的なモードとなる, すな

わちゴーストとしてゼロノルムの部分空間にしか存在しないという可能性もあるのである. その場合ゴールドストーン粒子は観測されず, S 行列にはあらわれなくなり, 先の問題を避けることができる.

しかし, さらにもう一つ考えなければならないことがある. 理論を $\phi = 0$ でくりこんでいるときは, ゲージ場は横波のみで縦波成分は存在しない. 一方プロカ・ボソンが理論に実際に存在するとき, 7.1 節の議論からそれには縦波成分もなければならない. 従って $\phi_0 \neq 0$ の周りの部分空間ではプロカ・ボソンの縦波成分をどこかから与えなければならないという問題もある.

ヒッグス・キッブル機構[10,11]はこれら 2 つの問題を一度に解決する. それによると, 対称性の破れたところでゴールドストーン・ボソンがプロカ・ボソンの縦波成分を与え, ゴールドストーンモードは非物理的な部分空間に含まれてしまう. この節の残りでは前節で取り扱った可換ゲージ理論のラグランジアンでこのメカニズムを説明する. これは非可換群の場合に素直に拡張され, 次節で簡単に議論するグラショウ・サラム・ワインバーグの標準電弱理論で用いられる. ヒッグス・キッブル機構をクーロン・ゲージでしめすこともできる[12]が, ここでは明白に共変的な方法をとる.

出発点は, 前節で議論した, 一種類の複素スカラー場が可換ゲージ場とゲージ不変な形で結合している古典ラグランジアンで, 以下のようになる.

$$\mathcal{L} = D_\mu^* \phi^* D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi^*, \phi) \,. \tag{9.81}$$

ここで共変微分は $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ で与えられる. ポテンシャル V は対称性が破れるように以下のようにおく.

$$V(\phi^*, \phi) = -\mu^2 \phi^* \phi + \frac{1}{2}\lambda(\phi^*\phi)^2 \,, \quad \mu^2, \lambda > 0 \,. \tag{9.82}$$

これは明らかにゲージ不変である.

古典レベルでヒッグス・キッブル機構を議論するのはやさしい. これには次式のように場の極座標的分解と置き換えを同時に行なうとよい.

$$\phi = e^{i\theta/\nu}(\rho + \nu) \,. \tag{9.83}$$

ここで ρ, θ は二つの実の場で ν はポテンシャルから決められる定数である. (9.83) をラグランジアンに代入すると,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\;& 2(\mu^2\nu - \lambda\nu^3)\rho + \partial_\mu\rho\,\partial^\mu\rho + \partial_\mu\theta\,\partial^\mu\theta + 2e\nu\,A^\mu\partial_\mu\theta + e^2\nu^2\,A_\mu A^\mu \\
& - (3\lambda\nu^2 - \mu^2)\rho^2 + \frac{2}{\nu}\,\rho\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + 2e^2\nu\,\rho A_\mu A^\mu + 4e\,\rho A^\mu\partial_\mu\theta \\
& + \frac{1}{\nu^2}\,\rho^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + 2\frac{e}{\nu}\,\rho^2 A^\mu\partial_\mu\theta + e^2\,\rho^2 A_\mu A^\mu \\
& - 2\lambda\nu\,\rho^3 - \tfrac{1}{2}\lambda\,\rho^4 - \tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{9.84}
$$

4.5 節で量子力学の場合に議論したのと同様に, 系の安定性に対する最小限の基準は, 場について線形な項がすべて消え, しかもすべての場の質量が実数になることである. (9.84) のラグランジアンの場合, この安定性から,

$$
\nu = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{9.85}
$$

となる. 容易にわかるように, この場合 ρ は質量 $m^2 = 2\mu^2$ の励起に対応し, θ は質量ゼロのゴールドストーン・モードに対応している. 一方ベクトル場は $M^2 = 2e^2\nu^2$ の質量を得る.

ν が (9.85) の値をとるとき, 簡単な計算により (9.84) は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\;& \partial_\mu\rho\,\partial^\mu\rho - \tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - 2\mu^2\,\rho^2 - 2\lambda\nu\,\rho^3 - \tfrac{1}{2}\lambda\,\rho^4 \\
& + (e^2\nu^2 + 2e^2\nu\,\rho + e^2\rho^2)\left(A_\mu + \frac{\partial_\mu\theta}{e\nu}\right)\left(A^\mu + \frac{\partial^\mu\theta}{e\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{9.86}
$$

となることがわかる. この式から明らかなように, ゴールドストーン・モード θ は場の再定義

$$
A_\mu \to A_\mu - \frac{\partial_\mu\theta}{e\nu} \tag{9.87}
$$

により取り除くことができる. この置き替えはゲージ変換と同じ形をしており, $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ を変えない. ラグランジアンは最終的に,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\;& \partial_\mu\rho\,\partial^\mu\rho - 2\mu^2\,\rho^2 - \tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + e^2\nu^2\,A_\mu A^\mu \\
& + (2e^2\nu\,\rho + e^2\rho^2)A_\mu A^\mu - 2\lambda\nu\,\rho^3 - \tfrac{1}{2}\lambda\,\rho^4
\end{aligned}
\tag{9.88}
$$

となる. この理論は一種類の質量を持つスカラー粒子が質量を持ったプロカ・ボソンと相互作用している理論をあらわす.

これまでのことは古典論では明らかに正しい. しかし量子論としては微妙な問題が生じる. 場の極座標的分解は, 経路積分において自明でなく処理しにくいヤコビアンを生じるのであまり便利ではない. しかし量子論においても, ゲージ変換によってゴールドストーン・モードを取り除くという考え方は用いることができる. ゴールドストーン・モードが非物理的な部分空間に消えることは, QED の共変形式でのゲージ変換とゴーストとの密接な関係から強く示唆される.

量子化されたヒッグス・モデル（このモデルは現在そう呼ばれている）は, 以下でわかるように経路積分で解析できる. 簡単のため, この節の以下の部分では有効ポテンシャルはツリー・レベルでのみ考える. すなわち ϕ_0 を定数として $V_{\text{eff}}(\phi_0) = V(\phi_0)$ と考える. 最初にポテンシャルのパラメーターを次のように取り直すと便利だ.

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2 \, . \tag{9.89}$$

有効ポテンシャルの極小点では,

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(\phi_0)}{\partial \phi_0} = -\mu^2 \phi_0^* + 2\lambda(\phi_0^* \phi_0)\phi_0^* = 0 \tag{9.90}$$

となっており, その解は,

$$\phi_0 = e^{i\alpha} \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \equiv \frac{\nu}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \, , \tag{9.91}$$

である. ここで α は任意の定数だ. この任意の位相は極小点が無限に縮退していることによる.

α は任意の定数なので系のダイナミクスには効かない. このことはすぐ先でみる. 系は真空期待値の周りで揺らぐが, これは場を

$$\phi \to \phi e^{i\alpha} + \frac{\nu}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \tag{9.92}$$

と変換することによりあらわされる. もともとあった位相についての不変性から, 結果として得られるラグランジアンは α には依らない. 従って結局のところ対称性の破れはスカラー場を**実数** ν だけ,

$$\phi \to \phi + \frac{\nu}{\sqrt{2}} \tag{9.93}$$

とずらすことと完全に等価である.

複素場を二つの実場で,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \tag{9.94}$$

とあらわすと便利だ. この置き替えに伴うヤコビアンは 1 である. (9.33) の場の真空期待値は実数なので, 場 ϕ_1 がゼロでない真空期待値 ν を持つ成分だ. 生成汎関数はファインマン・ゲージで,

$$_+\langle \nu \,|\, \nu \rangle_- = \int_\nu^\nu \mathcal{D}\phi_1\,\mathcal{D}\phi_2\,\mathcal{D}A\,\delta(\partial_\mu A^\mu)\,\exp\left\{ i\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, A_\mu)\right\} \tag{9.95}$$

とあらわされる. ゲージ自由度分の体積は落としてある. ラグランジアンは,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &+ e\phi_2 A^\mu\partial_\mu\phi_1 - e\phi_1 A^\mu\partial_\mu\phi_2 + \tfrac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu({\phi_1}^2 + {\phi_2}^2) \\ &+ \tfrac{1}{2}\mu^2({\phi_1}^2 + {\phi_2}^2) - \tfrac{1}{4}\lambda({\phi_1}^2 + {\phi_2}^2)^2 \end{aligned} \tag{9.96}$$

となる. この経路積分の形はゲージ理論のハミルトニアンの解析から導かれる. 7.2 節での手続きがここでも可能で, 拘束となるガウスの法則は作用に吸収され, 運動量積分を実行するとこの (9.95) が得られる.

経路積分の境界条件は ϕ_1 を ν だけずらすことにより作用に吸収される. ν のツリー・レベルの値から A_μ の二次の項が生じる.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 \;=\;& \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \mu^2{\phi_1}^2 + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - e\nu A^\mu\partial_\mu\phi_2 \\ &- \tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \tfrac{1}{2}e^2\nu^2 A_\mu A^\mu\,. \end{aligned} \tag{9.97}$$

また, 三つの場全てを含む高次の項も多く生じる. (9.97) から明らかなように ϕ_2 は質量項を持たず, ゴールドストーン・ボソンとしてあらわれている. ヒッグス機構により ϕ_2 はゲージ変換

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{M}\partial_\mu \phi_2 \tag{9.98}$$

によってラグランジアンの二次の部分から取り除かれる. ここで $M = e\nu$ とした. 結局, ラグランジアンの二次の部分は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 \quad = \quad & \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \mu^2{\phi_1}^2 + -\tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}M^2A_\mu A^\mu \\ & -\tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{M}\Box\phi_2)^2 \,.\end{aligned} \tag{9.99}$$

A_μ の変換により, 経路積分にあるデルタ関数は,

$$\delta(\partial_\mu A^\mu) \;\to\; \delta\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{M}\Box\phi_2\right) \tag{9.100}$$

となるため, (9.99) の最後の項は消える.

もちろん, 高次の項には依然 ϕ_2 が残っているが, デルタ関数により,

$$\Box\phi_2 = -M\partial_\mu A^\mu \tag{9.101}$$

となるので ϕ_2 は簡単に積分できる. 結果的には高次の項に出てくる ϕ_2 は (9.101) の解で置き替えられる. 形式的には,

$$\phi_2 = -M\left(\frac{1}{\Box}\right)\partial_\mu A^\mu \tag{9.102}$$

を代入すればよい. この変換後の理論の経路積分は最終的に,

$${}_+\langle \nu \,|\, \nu \rangle_- = \int_0^0 \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}A\,\exp\left\{i\int d^4x(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I)\right\} \tag{9.103}$$

となる. ここで,

$$\mathcal{L}_0 = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^2 - \tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}M^2A_\mu A^\mu \tag{9.104}$$

である. ゴールドストーン・ボソンはゲージ条件から非物理的な部分空間に消え, 質量を持つプロカ・ボソンと質量を持つスカラー粒子が相互作用するラグランジアンが残る.

高次の項に関しては二つの点が重要だ. 変換(9.98)と恒等式(9.102)から, 多くの非局所項が長さの正の次元の係数を持つ. 素直な次数勘定からは, この理論はくりこみ不可能となる. ところがこれらの見かけの発散項はプロカ・ボソンのプロパゲーターの紫外発散をおさえるのに丁度必要な項になっている. これは高次の項の間で, 前に述べた“奇跡的な打消し合い”が起こっている場合で, 理論は依然くりこみ可能なのである. このような結果は, もとの対称性の破れていない理論がくりこみ可能であることから予想されることであるが, 厳密な証明はこの本の範囲を越えているので, 参考文献[9,13,14]を参照されたい.

二つめの点は, $\partial_\mu A^\mu$ を含むS行列がもはやゼロにはならないということだ. これはプロカ・ボソンが縦波成分を持つことから予想される. 元のゲージ場の漸近場に現れるスペクトルは, 横波のモードおよび縦波成分 $\partial_\mu A^\mu$ に関係付けられるゴーストからなる. 質量ゼロの場合はゴーストのS行列は消えるが, 質量がゼロでない場合はこの縦波成分の関与するS行列は自明ではなくなる. このことは経路積分の二次の部分から得られるプロカ・ボソンのプロパゲーター(9.75)の性質によっている.

> **例題 9.4**: (9.75)が実際に今の理論に現れるプロカ・ボソンのプロパゲーターになっていることを確かめよ.

プロパゲーターとは場の時間順序積の真空期待値で,

$$\langle 0| T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\} |0\rangle = i\Delta^{\mu\nu}(x-y) \ . \tag{9.105}$$

$\Delta_{\mu\nu}$ に対する(9.75)の表式からすぐに

$$\langle 0| T\{\partial_\mu A^\mu(x)A^\nu(y)\} |0\rangle = i\partial_\mu\Delta^{\mu\nu}(x-y) = \frac{i}{M^2}\partial^\nu\delta^4(x-y) \tag{9.106}$$

が示せる. $\partial_\mu A^\mu$ からなる励起は物理的なモードに変えられ, 正のノルムを持つようになる. プロカ・ボソンの運動方程式は,

$$(\Box + M^2)A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = J^\mu \tag{9.107}$$

となり, ここから直ちに A_μ が結合するカレントが, もはや保存せず,

$$\partial_\mu J^\mu = M^2 \partial_\mu A^\mu \tag{9.108}$$

となることがわかる.

ヒッグス機構は非可換群の場合に問題なく拡張される [15]. この場合ラグランジアンは複素スカラー場について, 前節の (9.70) で与えられる. 詳しいことをみるには前と同ように実場で書き直す方が易しい. このように表示する場合には群の表現空間が二倍の次元を持つことに注意が必要だ. もし Φ が複素スカラー場の多重項をあらわすならば,

$$R = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^* \end{pmatrix} \tag{9.109}$$

であらわされる二倍の大きさの新しい多重項と, もとの共変微分を用いて

$$\mathcal{D}_\mu = \begin{pmatrix} D_\mu & 0 \\ 0 & D_\mu^\dagger \end{pmatrix} \tag{9.110}$$

とあらわされる R と同じ次元を持つ行列としての共変微分が必要となる. これらを用いてもとのラグランジアンは,

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{D}_\mu^\dagger R^\dagger \mathcal{D}^\mu R \tag{9.111}$$

とあらわされる. このラグランジアンはユニタリー変換で実スカラー場で書きあらわすこともできる. 例えば最も簡単な場合としてヒッグス・モデルのように一成分の複素スカラー場しかない場合には, そのユニタリー変換は,

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi^* \end{pmatrix} \equiv \mathbf{U}\Phi\,. \tag{9.112}$$

$\mathcal{D}_\mu$ に同じ変換 $\mathbf{U}$ をほどこすと, 共変微分の実表現

$$\mathcal{D}_\mu^R = \mathbf{U}\mathcal{D}_\mu\mathbf{U}^{-1} \tag{9.113}$$

が得られる.

例題 9.5: SU(2) の実表現を構成せよ.

非可換理論を解析する第一歩として，ゴールドストーン・ボソンの数と質量を持つベクトル場の数が等しいことをみる. 複素表現でのゲージ場の質量行列は (9.71) であるが，実表現では,

$$\frac{1}{2}g^2\left(\phi_0^c T_{ca}^k T_{ab}^j \phi_0^b\right) A_\mu^j A^{k\mu} \equiv \frac{1}{2}M_{jk}^2 A_\mu^j A^{k\mu} \tag{9.114}$$

となる. ここで T^j はスカラー場の実の表現空間にはたらく生成子だ. この行列は対称行列で実，よってエルミートとする. (9.114) をみるとわかるように，ゲージ場 A_μ^j が実際に質量行列 M_{jk}^2 にあらわれ，質量を得るための**必要十分条件**は，アイソスピン空間中のベクトル $T_{ab}^j\phi_0^b$ がゼロにならないことである. 9.1 節での用語を用いると，このことは次のように言いあらわせる. すなわち，対称性が自発的に破れるとき，ずらしたラグランジアンの質量項には，破れた生成子それぞれに対応してベクトル・ボソンがあらわれる. 一方 9.1 節のゴールドストーンの定理によれば，破れた生成子毎にゴールドストーン・ボソンがあらわれる. 従って一般の非可換理論の場合で対称性がどのように破れようと，ゴールドストーン・ボソンの数と質量を持ったベクトル場の数は同じになる. さもないとヒッグス機構ですべての質量を持ったベクトル場に縦波成分を与えられないので，このことは必ず成立っていなければならない.

次にゴールドストーン・ボソンがゲージ場に吸収されることをみる. 場をずらした後，ラグランジアンには次のような二次の項が生じる.

$$gA_\mu^j \partial^\mu \phi^a T_{ab}^j \phi_0^b \,. \tag{9.115}$$

ゴールドストーンの定理から，ゼロでないアイソベクトル $gT_{ab}^j\phi_0^b$ は，スカラー場の質量行列のゼロ固有値を持つ固有ベクトルになる. この質量行列はエルミートなので，これらのゼロでない固有ベクトルは互いに直交し，それらは次式を満たす.

$$g^2\phi_0^c T_{ca}^k T_{ab}^j \phi_0^b = M_{(j)}^2 \delta_{jk} \,. \tag{9.116}$$

ここで生成子のエルミート性を使った. (9.116) と (9.114) を比べればすぐにわかるように, 実表現ではゲージ場の質量行列は自動的に対角化されており, (9.116) にある規格化定数はまさにゲージ場の質量固有値になっている. したがって (9.115) は,

$$gA_\mu^j \partial^\mu \phi^a T_{ab}^j \phi_0^b \equiv M_{(j)} A_\mu^j \partial^\mu \phi_G^j \tag{9.117}$$

となる. ϕ_G はゴールドストーン・モードをあらわし,

$$\phi_G^j = \frac{g}{M_{(j)}} \phi_0^a T_{ab}^j \phi^b \, . \tag{9.118}$$

ヒッグス機構では, このゴールドストーン・モードは場の再定義,

$$A_\mu^j \to A_\mu^j + \frac{1}{M_{(j)}} \partial_\mu \phi_G^j \tag{9.119}$$

によりラグランジアンの二次の部分から取り除かれる. この変換にともない, 質量を持つベクトル場に対するゲージ固定因子は,

$$\delta(\partial_\mu A^{j\mu}) \to \delta\left(\partial_\mu A^{j\mu} + \frac{1}{M_{(j)}} \Box \phi_G^j\right) \tag{9.120}$$

となり, これによりゴールドストーン・モードはすべて積分することができる.

9.4 $\mathbf{SU(2)}_L \times \mathbf{U(1)}$ 電弱モデル

前節の初めに議論した弱い相互作用のフェルミ・モデルは, グラショウ・サラム・ワインバーグ (GSW) モデル [16] として知られる非可換ゲージ理論を用いて, 電磁相互作用と統一される. このくりこみ可能な理論では, 対称性の自発的破れを通して, 質量を持ったプロカ・ボソンが生じる. 弱い相互作用は, そのプロカ・ボソンの交換によると考えられる [17]. そして残りの質量がゼロのままのゲージ場を光子とみなす. こうして得られる理論はくりこみ可能で, 二つの電荷を持ったプロカ・ボソン $W_\mu^\pm$ と一つの中性のプロカ・ボソン Z_μ の存在を予言する. それらの粒子の質量ははじめ低エネルギーのデー

タから推察されたが, 実際にその質量の粒子が直接観察されるに従い, この理論の成功は確実なものとなった.

強い相互作用を行なう粒子は**ハドロン** (hadrons) と呼ばれる. このモデルでは, ハドロンはすべてクォークから作られる. 7.5 節で述べたように, 強い相互作用は QCD で記述され, 知られているすべてのハドロンはクォークの2体もしくは3体の束縛状態とみることができる. クォーク2体の束縛状態はパイ中間子のような比較的軽いハドロンを形成する. クォーク3体の束縛状態は中性子や陽子のような比較的重いハドロンを形成し, **バリオン** (baryon) と呼ばれる. このメカニズムは複雑で, 今だに完全には理解されていないが, 本書ではその簡単な側面のみについて述べる. その中で多くの重要な点を略すが, それらについてはより丁寧に取り扱っている文献を参照してもらいたい [18].

本書を書いている時点で, クォークは1世代2つずつで3世代からなり, 後の世代ほど重くなると考えられている. 各世代はそれらの複合粒子としてより重いハドロンをつくるが, 各世代からつくられたハドロンは弱い相互作用と強い相互作用の**両方**で同じように振舞う. これは弱い相互作用の, フェルミ結合定数の普遍性のあらわれである. 7.5 節で述べたように, ハドロンに正しい電荷を与えるには, クォークは分数電荷を持たねばならない. 例えば2つの軽いクォーク u と d は第一世代を形成し, カラーの足を略すと, 二重項として,

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{9.121}$$

とあらわされる. u クォークは電荷 $\frac{2}{3}e$ を持ち, d クォークは電荷 $-\frac{1}{3}e$ を持つ. 従って $u\bar{d}$ の複合状態は電荷 e を持ち, 荷電パイ中間子となる. uud の複合状態も電荷 e を持ち, 陽子となり, udd の状態は電荷0の中性子になる. 各複合粒子のバリオン数は, それを形成するクォークのバリオン数の和として得られる. 各クォークはバリオン数 $\frac{1}{3}$ を持ち, 各反クォークはバリオン数 $-\frac{1}{3}$ を持つので, $u\bar{d}$ 状態はバリオン数0, uud はバリオン数1となる. 結局バリ

オン数とは，それを形成しているクォークの数から反クォークの数を引きいて$\frac{1}{3}$をかけたものだ．バリオン数保存の破れは，実験的には非常に小さいが，だからと言ってバリオン数保存が厳密に成り立つことを意味しない．これについては，次節でカイラルアノマリーについて議論する際にも若干述べる．

もう一つ**レプトン**(lepton)と呼ばれる種類の粒子がある．レプトンは電磁および弱い相互作用しか行なわない．また，それらは二重項であらわされる世代を形成している．第一世代は電子と電子ニュートリノからなり，二重項は，

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \tag{9.122}$$

とあらわされる．これら二つの粒子は随分異なる性質を持つので一緒にするのは疑問に思えるかもしれない．実際ニュートリノには左巻き成分しかなくてあきらかに質量ゼロであるのにのに対し，電子には両方のカイラリティーがあり，質量もある．またニュートリノは電気的に中性なのに対し，電子はeの電荷を持つ．これらの事柄にもかかわらず，これらを二重項にみなすと非常に見通しよく整理できる．

以降では第一世代のクォークとレプトンのみを取り扱う．世代の異なるクォーク間の混合とそれに伴うクォークの質量生成やCP非保存などの問題は扱えないが，一世代を取り扱うだけでも標準理論における弱い相互作用の性質を多くみることができる．クォークとレプトンについて，弱い相互作用の有効モデルであるフェルミのカレント・カレントモデルは，

$$\mathcal{L}_w = \frac{1}{\sqrt{2}} G_F J_\mu^\dagger J^\mu \tag{9.123}$$

とあらわされる．ここでカレントは左巻き成分粒子のみからなり，

$$J_\mu = \cos\theta_c\, \bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d + \bar{\nu}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)e \tag{9.124}$$

とあらわされる．θ_c は**キャビボ角**(Cabibbo angle)と呼ばれ，弱い相互作用におけるクォークの混合をあらわす．以降では簡単のため $\theta_c = 0$ とする．このカレントで ν と e が一緒に出てくるため，これらを二重項として扱うのが

もっともらしいということがわかる．この有効相互作用は現象論的に大変うまくいき，このカレントの構造からGSWモデルが導かれた．電磁相互相互作用には両方のカイラリティーのクォークとレプトンが関わるのに対し，弱い相互作用に関しては，左成分粒子のみが重要である．従ってもしこのカレント・カレント相互作用が何か別のゲージ理論の低エネルギー極限であるのなら，そのゲージ場は弱い相互作用で各世代の左成分部分のみと結合するものでないといけない．

こうして弱い相互作用と電磁相互作用をゲージ理論で統一しようとすると，場の左巻き成分と右巻き成分を異なる形で取り扱わねばならないことがわかった．各世代の二重項構造から，最も簡単な非可換ゲージ群は SU(2) で，その基本表現を用いればよい．そして弱い相互作用は左巻き成分のみなので，このゲージ群も左巻き成分のみに働くものと考えられ，$SU(2)_L$ とあらわす．

SU(2) ゲージ理論には 3 つのゲージボソンが含まれる．弱い相互作用がベクトル・ボソンの交換によるものとすると，それらのうちの少なくとも 2 つは電荷を持っていなければならない．三つ目のゲージボソンを光子とみなしたいところであるが，弱い相互作用で**中性カレント** (neutral current) が観測されているので，ゲージ場は合計 4 個ないといけない．そのうちの 2 つが電荷を持つプロカ・ボソンで，1 つが中性のプロカ・ボソン，残りが光子だ．適当な電磁相互作用を得るためには，左巻きと右巻きの両方の成分と結合する U(1) ゲージ場を導入すればよい．この U(1) ゲージ場と様々な左成分，右成分粒子との結合の強さは観測されている電荷に応じて与えればよい．

これらの制約とアイデアをもとに基本的なモデルを構成する．まず初めにクォークやレプトンの左巻き成分の二重項を，

$$L_L = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)L\,,\quad Q_L = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)Q \tag{9.125}$$

のようにつくり，これらは$SU(2)_L$ で変換されるとする．すると左巻きセクターはラグランジアン，

$$\mathcal{L}_L \quad = \quad i\bar{Q}_L\gamma^\mu(\partial_\mu + \tfrac{1}{2}igW_\mu^j\sigma_j + \tfrac{1}{2}ig'Y_Q B_\mu)Q_L$$

$$+ i\bar{L}_L\gamma^\mu(\partial_\mu + \tfrac{1}{2}igW_\mu^j\sigma_j + \tfrac{1}{2}ig'Y_L B_\mu)L_L \qquad (9.126)$$

で記述される．$\frac{1}{2}$ の因子は後の便宜のためにつけておく．右成分セクターは 3 つの $SU(2)$ 一重項,

$$e_R = \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)e\,,\ \ u_R = \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)u\,,\ \ d_R = \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)d\,, \qquad (9.127)$$

からなり, それらの電荷を考慮してラグランジアンは,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R \quad = \quad & i\bar{e}_R\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu)e_R + i\bar{u}_R\gamma^\mu(\partial_\mu - \tfrac{2}{3}ig'B_\mu)u_R \\ & + i\bar{d}_R\gamma^\mu(\partial_\mu + \tfrac{1}{3}ig'B_\mu)d_R \end{aligned} \qquad (9.128)$$

となる．左成分の二重項の各成分は $\frac{1}{2}(\sigma_3 + Y)$ の固有値で区別される．これに注意して, 左成分セクターのフェルミオンと可換ゲージ場の結合の強さ Y を決める．いま, 破れていない可換ゲージ対称性が電磁相互作用に対応するものとしているので, ニュートリノの電荷をゼロ, 電子の電荷を $-e$ とするには, レプトン二重項について $Y_L = -1$ にとる必要がある．同様に $Y_Q = \frac{1}{3}$ にとると u クォークと d クォークの電荷は, それぞれ $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$ となる．

ゲージ場は, (通常の自由場のラグランジアンに加えて),

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \qquad (9.129)$$

であらわされる複素スカラー二重項と結合する．ゴールドストーン・モードは, ゲージ場に吸収されてプロカ・ボソンを生じるので, ϕ の内の 2 つの自由度は電荷を持ち, 残りの 2 つの自由度は中性でなければならない．それにはラグランジアンの中のゲージ・スカラー結合を,

$$\mathcal{L}_s = (\partial_\mu - \tfrac{1}{2}igW_\mu^j\sigma_j - \tfrac{1}{2}ig'B_\mu)\phi^\dagger(\partial_\mu + \tfrac{1}{2}igW_\mu^j\sigma_j + \tfrac{1}{2}ig'B_\mu)\phi \qquad (9.130)$$

ととればよい．

レプトンとスカラー粒子のゲージ不変な湯川結合,

$$\mathcal{L}_I = -G_L\left[\bar{e}(\phi^\dagger L_L) + (\bar{L}_L\phi)e\right]\,. \qquad (9.131)$$

があってもよい．また，クォークについても同様の項が書き下せるが，それらを議論するにはもう少し準備が要る．ここでは紙面の都合上割愛するが，読者には多くのテキストにある標準理論の優れた記述を参照するよう薦める[18].

あとはポテンシャルを

$$V = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{9.132}$$

と仮定し，ツリー・レベルで対称性を破るようにすればよい．真空が電荷を持たないために，ϕ の真空期待値を実数と仮定すると，それは一般に次の型になる．

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} . \tag{9.133}$$

ここで，

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{9.134}$$

である．スカラー場を真空期待値の分だけずらすと，ベクトル場の質量項があらわれる．簡単にわかるように，

$$\left[(\tfrac{1}{2}gW_\mu^j\sigma^j + \tfrac{1}{2}g'B_\mu)\langle\phi\rangle\right]^2 = \tfrac{1}{4}g^2v^2W_\mu^+W^{-\mu} + \tfrac{1}{8}(g^2+g'^2)v^2Z_\mu Z^\mu \tag{9.135}$$

となる．ここで，

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^{(1)} \pm iW_\mu^{(2)}) ,$$
$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(g'W_\mu^{(3)} - gB_\mu) . \tag{9.136}$$

Z_μ はアイソスピン空間におけるベクトル，

$$\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\begin{pmatrix} g' \\ -g \end{pmatrix} \tag{9.137}$$

に対応する．4番目のゲージ・ボソンは，$W_\mu^{(3)}$ と B_μ の線形結合であり，この Z_μ に直交するものだ．すなわち，

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gW_\mu^{(3)} + g'B_\mu) . \tag{9.138}$$

この A_μ に対しては質量項がなく，光子場に対応する．

理論に含まれるパラメータから容易に観測量を得ることができる．ゲージ場の質量は明らかに，

$$M_W = \tfrac{1}{2}gv\,,\quad M_Z = \tfrac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2} \tag{9.139}$$

で与えられる．電磁相互作用の結合定数は，対称性の破れた理論で $A_\mu \bar{e}\gamma^\mu e$ の係数をみるとわかる．この係数は電荷素量 q に等しいはずで，

$$q = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{9.140}$$

となる．$W^\pm$ ボソンと弱カレント (9.124) の結合は，

$$\mathcal{L}_I = \frac{g}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+ J^\mu + W_\mu^- J^{\dagger\mu}) \tag{9.141}$$

で与えられる．前節での議論を用いて，これよりカレント間の有効相互作用は

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \tfrac{1}{8}g^2 \int d^4x\, d^4y\, J_\mu^\dagger(x)\Delta^{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y) \tag{9.142}$$

となる．ここで $\Delta^{\mu\nu}$ は $W^\pm$ ボソンのプロカ・プロパゲーターだ．低エネルギー極限では $W^\pm$ 粒子の質量からの寄与が主となり，

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \approx \frac{g^2}{8M_W^2} J_\mu^\dagger J^\mu\,. \tag{9.143}$$

となる．(9.123) と (9.143) を比較して，

$$G_F = \frac{g^2\sqrt{2}}{8M_W^2} = \frac{\sqrt{2}}{2v^2}\,. \tag{9.144}$$

フェルミ結合定数は低エネルギーのデータからよくわかっていて，これから真空期待値は $v \simeq 246$ GeV と決められる．質量を決定するのに最後に必要なものは，電気的に中性な Z_μ ボソンと中性カレントとの結合の強さだ．Z によるカレント間の有効相互作用は，各粒子の電荷が保存する $\nu + \pi \to \nu + \pi$ のような散乱を記述する．これらいわゆる中性カレントによるイベントの観測から結合の強さがわかり，W ボソンと Z ボソンの質量はそれぞれ $\simeq 80$ GeV と $\simeq 90$ GeV と定まる．

ヒッグス機構により, スカラー場の4つの自由度のうち3つがなくなり, 1つのスカラー粒子だけが物理的に励起されうるモードとして残り, その質量は $\sqrt{2}\mu$ で与えられる. このいわゆるヒッグスボソンは標準理論にあらわれる唯一の基本スカラー粒子で, 他のスカラー粒子はすべてクォークの複合粒子だ. 残念なことに, その質量を決める手だてがなく, これを書いている時点ではまだ直接観測にかかっていない. この観測されないヒッグスボソンを含むヒッグス機構は, もっと複雑な**ダイナミカル**な対称性の破れのメカニズムの低エネルギー近似かも知れないということも議論されてきた. この力学的メカニズムでは, 超電導体のときのように, スピノル粒子が凝縮して低エネルギーでスカラー粒子のように振舞うとされる. このようなことが起こる簡単なモデルは 9.5 節と 9.7 節 で簡単に述べる.

9.5 カイラルアノマリー

作用の古典的不変性にともなうワード・高橋恒等式について議論したとき, その不変性にともなうカレントが量子論的にも保存するためには, 経路積分の測度が不変でなければならなかった. いままで取り扱った例ではすべてそうなっている. しかし, これにはゲージ場のトポロジー的性質に深く関わる重要な例外がある.

質量のないディラック場の作用は, 6.4.3 節でみたようにカイラル変換

$$\psi \to \exp(i\alpha\gamma_5)\psi \tag{9.145}$$

のもとで不変だ. $\bar{\psi}$ の変換則,

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}\exp(i\alpha\gamma_5) \tag{9.146}$$

より質量項 $\bar{\psi}\psi$ は不変でないので, 質量ゼロが要請される.

しかし量子論ではカイラル不変性に関してもっと深い問題が生じる. それは6.8.3 節でユークリッドの場合で議論したディラック場の経路積分の測度を

みるとわかる. 配位空間で測度は

$$\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_x d\psi(x)\,d\bar{\psi}(x) \tag{9.147}$$

となるので, カイラル変換は自明でないヤコビアンを生む. 4.3 節の用語を使うと, 古典的なカイラル不変性にともなうカレントが**カイラルアノマリー** (chiral anomaly)[19] といわれるアノマリーを持つということだ. このヤコビアンは質量のないスピノルと結合した一般のゲージ理論について経路積分を使って解析できる [20].

一般のゲージ理論の経路積分は二つの経路積分の積に分解できる.

$$\begin{aligned} {}_+\langle\, 0\,|\,0\,\rangle_- \quad &= \quad \int_0^0 \mathcal{D}A\,\Delta_\chi\,\delta(\chi)\exp\left\{i\int d^4x\,\mathcal{L}_g(A)\right\} \\ &\quad \times \int_0^0 \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\exp\left\{i\int d^4x\,\mathcal{L}_f(\psi, A)\right\}\,. \end{aligned} \tag{9.148}$$

ゲージ場のラグランジアン $\mathcal{L}_g$ にはスピノル場は含まれない. しかし, ゲージ場についてはスピノル場のラグランジアン

$$\mathcal{L}_f = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi \;\equiv\; i\bar{\psi}\not{D}\psi \tag{9.149}$$

からも寄与がある. (9.149) の表記で可換群の場合も非可換群の場合もあらわすことができる. ラグランジアン $\mathcal{L}_f$ はスピノル場について二次なので, 二番目の経路積分は形式的に評価することができる.

おなじみの処方に従って $t \to -it, A_0 \to iA_0$ とし, ユークリッド時空に解析接続する. 6.8.3 節でみたようにスピノル場のユークリッド測度は, 展開

$$\begin{aligned} \psi(x) \quad &= \quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\,\alpha_\lambda(p)w_\lambda(p)e^{ipx}\,, \\ \bar{\psi}(x) \quad &= \quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\,\beta_\lambda(p)w_\lambda^\dagger(p)e^{-ipx} \end{aligned} \tag{9.150}$$

のグラスマン係数により与えられる. $\omega_\lambda(p)$ は,

$$i\not{p}_E w_\lambda(p) = \lambda_p w_\lambda(p) \tag{9.151}$$

の４つの規格直交化された解をあらわす．ここで $\lambda_p = \pm p_E$ だ．経路積分の測度は全体の因子を除いて

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi = \prod_{p,\lambda} d\beta_\lambda(p)\,d\alpha_\lambda(p) \tag{9.152}$$

となる．

ユークリッド領域では微分演算子 $i\not{D}_E$ は自己共役だ．だからある任意のゲージ場の配位に対し，ユークリッドスピノルの固有値方程式，

$$i\not{D}_E W(x) = \lambda_E W(x) \tag{9.153}$$

の解は完全規格直交系をなすと考えられる．簡単のため，各固有関数を離散的な添え字を用いて $W_n(x)$ のように区別する．これらは，

$$i\not{D}_E W_n(x) = \lambda_n W_n(x)\ , \tag{9.154}$$

$$\int d^4x\, W_n^\dagger(x) W_m(x) = \delta_{nm}\ , \tag{9.155}$$

$$\sum_n W_n^{\dagger a}(x) W_n^b(y) = \delta_{ab}\delta^4(x-y) \tag{9.156}$$

を満たす．(9.156) ではスピノルの足をあらわに書いた．これらの公式を非可換群の場合に一般化するには，場と微分演算子にアイソスピンの足を付け加えればよい．もちろん添字 n は，実際には多くの添え字の組み合わせで，その内のいくつかは自由場の固有関数 (9.151) と同様に連続的な添え字となっている．固有値 λ_n は，暗に固有値問題を解くときに使ったゲージ場の配位の汎関数となっている．(9.150) のときと同様に，スピノル場は一般に，

$$\psi(x) = \sum_n a_n W_n(x)\ , \tag{9.157}$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n b_n W_n^\dagger(x) \tag{9.158}$$

と展開でき，積分測度は

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi = \prod_n db_n\, da_n \tag{9.159}$$

となる．しばらくの間 (9.152) と (9.159) の二つの測度が等価であると仮定する．すると少なくとも形式的には，固有スピノル W_n を自由場のユークリッド固有スピノルの完全系 (9.151) で展開できて，

$$W_n^a(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{W}_n(p,\lambda) w_\lambda^a(p) e^{ipx} \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} U_n^a(p) e^{ipx} \tag{9.160}$$

となる．ここで係数 $\tilde{W}_n$ は

$$\tilde{W}_n(p,\lambda) = \int d^4x \, w_\lambda^\dagger(p) W_n(x) e^{-ipx} \, . \tag{9.161}$$

したがってみかけ上これら二つの固有スピノル系は同じ関数空間を張り，等価となる．

> **例題 9.6**: 係数 $U_n^a(p)$ は完全系の条件
>
> $$\sum_n U_n^{\dagger a}(p) U_n^b(k) = (2\pi)^4 \delta_{ab} \delta^4(p-k) \tag{9.162}$$
>
> を満たすことをしめせ．

経路積分のスピノル部分はラグランジアンに (9.157) の展開を用いることにより

$$\int d^4x \, \bar{\psi} i \not{D}_E \psi = \sum_n \lambda_n b_n a_n \tag{9.163}$$

のように評価できる．a_n と b_n についてグラスマン積分すると経路積分のスピノル部分は求まって，

$$\prod_n \lambda_n = \det(i\not{D}_E) \tag{9.164}$$

となる．

カイラル変換で測度が不変にならないのは，経路積分で座標に依存するカイラル変換を行なうと明らかになる．8.2 節のゲージ不変性の場合と同様に，この変換によりカイラル変換にともなうカレントの発散が生じる．変換は

$$\psi(x) \to \exp[i\alpha(x)\gamma_5]\psi(x) \tag{9.165}$$

とあらわされ, 簡単にわかるようにスピノルの作用は,

$$\int d^4x\,\mathcal{L}_f \to \int d^4x\,(\mathcal{L}_f + \alpha\partial_\mu J^{5\mu}) \tag{9.166}$$

のように変換する. **軸性カレント** (axial current) J^5_μ は,

$$J^5_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \tag{9.167}$$

で与えられる. 古典論では, ラグランジアンは大域的なカイラル変換で不変なので J^5_μ は保存する.

量子論では測度が不変でない. (9.156) を使うと a_n は,

$$\begin{aligned} a_n &= \int d^4x W_n^\dagger(x)\psi(x) \to \\ a_n' &= \int d^4x\,W_n^\dagger(x)\exp[i\alpha(x)\gamma_5]\psi(x) \\ &= \sum_m \int d^4x\,d^4y\,W_n^\dagger(x)\exp[i\alpha(x)\gamma_5]W_m(x)W_m^\dagger(y)\psi(y) \\ &= \sum_m C_{nm}a_m \end{aligned} \tag{9.168}$$

のように変換することがわかる. ここで,

$$C_{nm} = \int d^4x\,W_n^\dagger(x)\exp[i\alpha(x)\gamma_5]W_m(x)\,. \tag{9.169}$$

b_n についても同様の変換則が得られ, a_n, b_n のグラスマン性からこの変換によるヤコビアンは,

$$\prod_n da_n\,db_n \;\to\; (\det C)^{-2}\prod_n da_n'\,db_n' \tag{9.170}$$

と与えられる.

この行列式はおなじみの恒等式

$$(\det C)^{-2} = \exp\left(-2\,\mathrm{Tr}\,\ln C\right) \tag{9.171}$$

を用いて作用の中に取り込むことができる．これは α を無限小にとったときは簡単に評価できる．その場合，

$$C_{nm} \approx \delta_{nm} + i\int d^4x\,\alpha(x)W_n^\dagger(x)\gamma_5 W_m(x) \tag{9.172}$$

となる．$A(x)$ を

$$A(x) = \sum_n W_n^\dagger(x)\gamma_5 W_n(x) \tag{9.173}$$

と定義すると，$O(\alpha^2)$ 以上の項を落として，

$$\mathrm{Tr}\ln C \approx i\int d^4x\,\alpha(x)\sum_n W_n^\dagger(x)\gamma_5 W_n(x) = i\int d^4x\,\alpha(x)A(x) \tag{9.174}$$

が得られる．(9.166) と合わせて，カイラル変換の結果として経路積分にあらわれる有効作用は，

$$\int d^4x\,\mathcal{L}_f \;\rightarrow\; \int d^4x\left[\mathcal{L}_f + \alpha(\partial_\mu J^{5\mu} - 2A)\right] \tag{9.175}$$

と変換される．8.2 節の議論と同様，この経路積分は α によってはならない．これより直ちに期待値の間の関係式，

$$\langle\,\partial_\mu J^{5\mu}(x)\,\rangle = \langle\,2A(x)\,\rangle \tag{9.176}$$

を得る．

(9.176) の右辺がゼロにならないとき，軸性カレントは量子論的には保存しないことになり，そのような理論は**カイラルアノマリー**を持つと言われる．実際にアノマリーが存在するかどうかや，その効果については問題とする理論の詳細によってくる．しかし一般にこのアノマリーを必ず避けなければならない場合がある．例えば，前節のＧＳＷモデルのようにもともと質量のない非可換ゲージ場が一つのカイラリティーのスピノルのみと結合している場合，ワード・高橋恒等式は軸性カレントが保存しているかどうかに決定的に依存する．理論がアノマリーを持てば，スラフノフ・テイラー恒等式は成り立たなくなり，理論の一般的なくりこみ可能性を証明できなくなってしまう．一方

軸性カレントが保存するか否かに関らず理論がくりこみ可能である場合, アノマリーは物理的に測定可能な現象を生む. 中性のパイ中間子の2光子崩壊がその例であるが, それについての議論はここでは行なわない.

微分演算子 $i\not{D}_E$ は質量項を含んでいないので, γ_5 とは反可換で, 解は左右のカイラリティーについて別々に分けられる.

$$W_n(x) = W_n^{(R)}(x) + W_n^{(L)}(x) \tag{9.177}$$

これから,

$$i\not{D}_E W_n^{(R)} = \frac{1}{2} i\not{D}_E (1+\gamma_5) W_n = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) i\not{D}_E W_n = \lambda_n W_n^{(L)} \tag{9.178}$$

が得られる. 同様に

$$i\not{D}_E W_n^{(L)} = \lambda_n W_n^{(R)} \tag{9.179}$$

がいえる. この関係と $i\not{D}_E$ のエルミート性から

$$W_n^{(L)\dagger} i\not{D}_E = \lambda_n W_n^{(R)\dagger} \tag{9.180}$$

が得られ, これらをあわせて,

$$\begin{aligned} \lambda_n \int d^4x\, W_n^{(R)\dagger} W_n^{(R)} &= \int d^4x\, W_n^{(L)\dagger} (i\not{D}_E) W_n^{(R)} \\ &= \lambda_n \int d^4x\, W_n^{(L)\dagger} W_n^{(L)} . \end{aligned} \tag{9.181}$$

これから, λ_n **がゼロでないとき,**

$$\int d^4x\, W_n^{(L)\dagger} W_n^{(L)} = \int d^4x\, W_n^{(R)\dagger} W_n^{(R)} \tag{9.182}$$

二つのカイラル射影の直交性から

$$W_n^{(L)\dagger} W_m^{(R)} = 0 \tag{9.183}$$

なので,

$$\int d^4x\, W_n^\dagger(x) W_m(x) = \int d^4x\, (W_n^{(R)\dagger} W_m^{(R)} + W_n^{(L)\dagger} W_m^{(L)}) = \delta_{nm} \tag{9.184}$$

となる．これから最終的に $\lambda_n \neq 0$ のとき，

$$\int d^4x\, W_n^{(L)\dagger} W_n^{(L)} = \int d^4x\, W_n^{(R)\dagger} W_n^{(R)} = \tfrac{1}{2} \tag{9.185}$$

となることがわかる．$\lambda_n = 0$ のとき W_n は**ゼロモード**と呼ばれ，これについては上記の証明は使えず，左右の固有スピノルのノルムは必ずしも一致し**ない**．

> **例題 9.7**: ゼロモードについて，各スピノルが定まったカイラリティーを持つように基底を選ぶことができることをしめせ．

(9.177) をアノマリーの表式に代入し，(9.185) を用いると，

$$\int d^4x \sum_n W_n^\dagger(x)\gamma_5 W_n(x) = n_+ - n_- \tag{9.186}$$

となる．ここで $n_\pm$ はそれぞれ右巻きと左巻きのゼロ・モードの総数だ．この数は固有値を計算するのに用いたゲージ場の形に関係している．これは右巻きと左巻きの固有モードの総数を計算し，その差を求めるとわかる．総数は両方とも無限だが，ゼロ・モード以外の数は一致するので，両者の差は有限だ．

しかしながら，和はともに発散するので引き算をして意味のある数を出すにはそれらを正則化，すなわち一貫した方法で有限化しなければならない．簡単な方法 [20] としてゼロでない固有モードの寄与を，

$$A_M(x) = \sum_n W_n^{aj\dagger}(x)\gamma^5_{ab} W_n^{bj}(x) \exp\left(-\frac{{\lambda_n^j}^2}{M^2}\right) \tag{9.187}$$

というふうに指数関数的に落とすという方法がある．ここで M はある大きな質量で，スピノルとアイソスピンの足もあらわに書いた．$i\not{D}_E$ はエルミートなので固有値はすべて実数だ．アノマリーは計算の最後に $M \to \infty$ の極限をとると再現される．減衰因子は $i\not{D}_E$ を用いてあらわされ，アノマリーは

$$A_M(x) = \sum_n W_n^{aj\dagger}(x)\gamma^5_{ab} \exp\left(\frac{{\not{D}_E}^2}{M^2}\right)^{(jk)}_{(bc)} W_n^{ck}(x) \tag{9.188}$$

となる. (9.160) の表式を用いて関数 W_n を平面波であらわすと,

$$A_M(x) = \sum_n \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ipx} U_n^{ja\dagger}(p)\gamma^5_{ab} \exp\left(\frac{\not{D}_E{}^2}{M^2}\right)^{(jk)}_{(bc)} U_n^{ck}(k) e^{ikx} \tag{9.189}$$

となる. 非可換群の場合の (9.162) の恒等式を使うと,

$$\begin{aligned} A_M(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}\gamma^5_{ab} \exp\left(\frac{\not{D}_E{}^2}{M^2}\right)^{(jj)}_{(ba)} e^{ikx} \\ &= \mathrm{Tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}\gamma^5 \exp\left(\frac{\not{D}_E{}^2}{M^2}\right) e^{ikx} \end{aligned} \tag{9.190}$$

と変形できる. ここでトレースはスピノルとアイソスピンの添字についてとっている.

演算子 $\not{D}_E{}^2$ は, (6.274) の定義と (7.173) とローレンツ・ゲージの条件を用いて

$$\begin{aligned} \not{D}_E{}^2 &= \gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu = \tfrac{1}{4}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\{D_\mu, D_\nu\} + \tfrac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,[D_\mu, D_\nu] \\ &= -\Box_E - g^2 A^\mu A_\mu + \tfrac{1}{2} g\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{9.191}$$

となる. しかし実際は, この結果はゲージ条件によらないことがしめせる. (9.190) の積分の中の運動量 k を, 無次元量 z を用いて $k = Mz$ とあらわすと,

$$A_M(x) = \mathrm{Tr} \int \frac{d^4z}{(2\pi)^4} M^4 e^{-iMzx}\gamma^5 \exp\left(\frac{\not{D}_E{}^2}{M^2}\right) e^{iMzx} \tag{9.192}$$

が得られる. ここで指数を展開し, トレースをとる. $M \to \infty$ の極限で消えない項は, M^{-4} 以上の項のみだ. こうして残る項は (9.191) を用いると,

$$\begin{aligned} & e^{-izMx}\frac{M^4}{n!}\left(\frac{\not{D}_E{}^2}{M^2}\right)^n e^{izMx} = \\ & \frac{M^4}{n!}(-z_E^2)^n + \frac{gM^2}{(n-1)!}(-z_E^2)^{n-1}(\tfrac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g^2 A_\mu A^\mu) \\ & + \frac{g^2}{2(n-2)!}(-z_E^2)^{n-2}(\tfrac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g^2 A_\mu A^\mu)^2 \end{aligned} \tag{9.193}$$

となる.

例題 9.8: (9.193) を確かめよ.

γ_5 の性質 $\mathrm{Tr}\gamma_5 = \mathrm{Tr}\gamma_5\sigma^{\mu\nu} = 0$ から最後の項のみが残ることがわかる. リー代数の生成子の規格 $\mathrm{Tr}(T^aT^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ とユークリッドでの恒等式,

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\right) = 4\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{9.194}$$

からアノマリーは,

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty} A_M(x) &= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\int\frac{d^4z}{(2\pi)^4}\,\frac{g^2}{(n-2)!}(-z_E^2)^{n-2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F^a_{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4}g^2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F^a_{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta}\int\frac{d^4z}{(2\pi)^4}\,e^{-z_E^2} \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}\right) \end{aligned}\tag{9.195}$$

となる. 軸性カレントの発散とアノマリーの関係から,

$$\partial_\mu J^{5\mu} = \frac{g^2}{16\pi^2}F^a_{\mu\nu}{}^*F^{a\mu\nu} \tag{9.196}$$

が得られる.

最初 (7.253) で定義したポントリヤギン密度がここにあらわれている. これはディラック演算子の右巻きと左巻きのゼロ・モードの数の差とゲージ場の配位のトポロジー的な指数とをアノマリーが関係づけることをしめす. 7.6 節でポントリヤギン密度の積分である巻数 n を持つ純ゲージの配位が存在することを述べた. 従って純ゲージの配位に対しては,

$$n_+ - n_- = \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}\right) = n \tag{9.197}$$

となる. (9.197) の結果は一般的な**指数定理** (index theorem) の特別の場合になっている. これらの定理は, 非自明なトポロジーを持つゲージ接続のもとでの左巻きと右巻きのカイラリティーのディラック演算子の核の次元についての関係を与える. 微分演算子の核とは固有値ゼロの固有関数によって張られ

た空間のことだ. 今の場合核は, 二つのカイラルなディラック演算子のゼロ・モードに対応し, アノマリーは直交するゼロ・モードの数を数えることにより, 単に右巻きと左巻きのカイラルな核の次元の差になっている. この結果から, 簡単な純ゲージの配位が理論のカイラル不変性を壊すことがわかる.

GSW モデルやそれを拡張した多くのモデルでは, 右成分のフェルミオン多重項と左成分のフェルミオン多重項が異なる相互作用をする. GSW モデルでは左成分のみが SU(2) ゲージ場と結合する. それらの理論ではアノマリー方程式の構造が変わる. 例えばフェルミオンの右巻き成分のセクターと左巻き成分のセクターが異なる結合をする場合, ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_L = i\bar{\psi}_R \not{D}_R \psi_R + i\bar{\psi}_L \not{D}_L \psi_L \tag{9.198}$$

と書かれる. ここで $\not{D}_L$ と $\not{D}_R$ は異なるゲージ場を含む共変微分だ. 各セクター毎の固有値方程式は,

$$\not{D}_R W_n = \lambda_n^W W_n\,, \quad \not{D}_L V_n = \lambda_n^V V_n \tag{9.199}$$

となる. 各微分演算子 $\not{D}_{R,L}$ の解 W_n, V_n はそれぞれ左右両方成分を持ち, 全関数空間で完全系を張る. これら W_n と V_n は, それぞれ対応する演算子の中に入っているゲージ場の配位から決められ, 互いには無関係だ. 当然のことであるが各カイラリティーに対応する解を用いて, 各セクターの展開を行なう. 例えば $\psi_R, \bar{\psi}_R$ はそれぞれ W_{nR}, W_{nL} で展開する. 古典ラグランジアン (9.198) は右巻き成分セクターと左巻き成分セクターの内の一方もしくは両方をカイラル変換しても不変だ.

$$\psi \;\rightarrow\; \exp\left[\frac{1}{2}i\alpha(1-\gamma_5)\right]\psi \tag{9.200}$$

で与えられる変換は左成分セクターにのみはたらく. カイラルアノマリーを導いたときと同様の計算で, (9.200) による古典的な不変性にともなうカレント,

$$J_L^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi \tag{9.201}$$

はアノマリー方程式

$$\partial_\mu J_L^\mu = -\sum_n V_n^\dagger \gamma^5 V_n \tag{9.202}$$

を満たす．ここで解 V の**両方**のカイラリティー成分がアノマリーにあらわれる．

> **例題 9.9**: (9.202) を確かめよ．

同様に右成分のカレント，

$$J_R^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi \tag{9.203}$$

はアノマリー方程式

$$\partial_\mu J_R^\mu = \sum_n W_n^\dagger \gamma^5 W_n \tag{9.204}$$

を満たす．ここでも解の両方のカイラリティー成分があらわれる．

ベクトルカレントは右成分カレントと左成分カレントの和，

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = J_L^\mu + J_R^\mu \tag{9.205}$$

となっているが，異なる結合を持つことからアノマリー方程式は，

$$\partial_\mu J^\mu = \sum_n \left[W_n^\dagger \gamma^5 W_n - V_n^\dagger \gamma^5 V_n \right] . \tag{9.206}$$

となる．(9.206) から，ベクトルカレントの保存する理論を作りたいときに，アノマリーをなくすにはどうすればよいかがわかる．右成分セクターのスピノルと左成分セクターのスピノルが全体で同じようにゲージ場に結合していれば，各セクターのスピノルが異なるものであっても (9.206) の右辺の中の各セクターからの寄与が打ち消しあうことになる．これはアノマリーの値がゲージ場の配位のみによっているからだ．

左右の成分で結合の仕方が異なる場合，ベクトルチャージ演算子はもはや保存しない．かわりに，方程式

$$Q(t_+) - Q(t_-) = \int_{t_-}^{t_+} dt\, \dot{Q} = \int d^4x\, \partial_\mu J^\mu$$

$$= \int d^4x \, \mathrm{Tr} \left[\frac{g_R^2}{16\pi^2} F^R_{\mu\nu} {}^*F^{R\mu\nu} - \frac{g_L^2}{16\pi^2} F^L_{\mu\nu} {}^*F^{L\mu\nu} \right] \tag{9.207}$$

が成立する. 7.1 節でみたように, 演算子 Q の固有値は粒子の総数と反粒子の総数の差をあらわす. もし結合が左成分セクターと右成分セクターで異なれば, 粒子-反粒子の数を保存しない過程が存在することになる.

例としてGSWモデルがある. このモデルではクォークやレプトンの左巻き成分はトポロジー的に自明でない配位を持つ SU(2) ゲージ場と結合するが, 右巻き成分はトポロジー的な性質を持たない U(1) ゲージ場としか結合しない. 9.4 節で指摘したように, バリオン数 B はクォーク数と反クォーク数の差に関係している. 正確には $\frac{1}{3}Q$ で与えられる. (9.207) からGSWモデルではバリオン数の保存則は破れている. バリオン数を保存しない過程の反応率は, 次節で述べるインスタントンを用いて評価できる. それによると現在得られるエネルギーではバリオン数の破れは極端に小さい [21].

例題 9.10: バリオン数からレプトン数引いた量, $B-L$ はGSWモデルでは厳密に保存することをしめせ.

カイラルアノマリーが中心的な役割を果たす非常に面白いモデルがシュウィンガーにより与えられている [22]. シュウィンガーモデルは質量のないスピノル場が可換ゲージ場にミニマル結合しているモデルで, $1+1$ 次元に限れば厳密に解ける. 演算子と状態の厳密解 [23] から, 力学的なベクトル場の質量生成やスピノル粒子の閉じ込めや θ 真空構造等の多くの著しい性質をこのモデルが持つことがわかる. ここでは経路積分形式でモデルを解く際に, カイラル変換の果たす役割に限って述べる.

ファインマンゲージでの可換シュウィンガーモデルのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \,. \tag{9.208}$$

シュウィンガーモデルが解けるのは $1+1$ 次元での話なので, ここで $1+1$ 次元のスピノルの特殊性について述べる. $1+1$ 次元のスピノル場のガンマ代

数は, 次のパウリのスピン行列に類似の行列を用いて簡単にあらわされる.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.209}$$

これらは

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \tag{9.210}$$

を満たす. γ_5 は $1+1$ 次元では,

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.211}$$

と定義される.

$1+1$ 次元のローレンツ群は一つのパラメータとローレンツ群の一つの生成子

$$T = \frac{1}{2}i[\gamma^0, \gamma^1] = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{9.212}$$

であらわされる. 有限ローレンツ変換は,

$$S(\Lambda) = \exp\{i\alpha T\} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}. \tag{9.213}$$

で与えられる. $1+1$ 次元のスピノル場は 2 成分を持つ. ローレンツ変換より, $\bar{\psi}\psi$ はローレンツ不変であることがわかる. ここで $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ だ.

スピノルのラグランジアンに質量項がないため, 古典論はカイラル変換で不変だ. しかし量子論はアノマリーを持つ. この節の前で $3+1$ 次元のカイラルアノマリーを評価したときと同様の計算により,

$$\psi(x) \;\to\; \exp\left[ig\phi(x)\gamma_5\right]\psi(x) \tag{9.214}$$

で与えられる局所カイラル変換の効果を求めることができる. ここで$\phi(x)$ は **任意の大きさの**時空点に依存する関数だ.

例題9.11: (9.214) の変換で, 1 + 1 次元のラグランジアンが経路積分で,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \partial_\mu \phi J_5^\mu - \frac{g^2}{4\pi}\phi\,\varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ , \tag{9.215}$$

と変換されることをしめせ. ここで $\epsilon_{\mu\nu}$ は2次元のレビ・チビタ記号で, $J_5^\mu = g\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ である.

カイラル変換で生じる $\partial_\mu\phi$ に比例する項によって, スピノルとゲージ場の結合を打ち消すことができる. ゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ によりゲージ場の自由度は2から1になっているので, 一般に

$$A_\mu = -\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\phi \tag{9.216}$$

と取ることができる. $\epsilon_{\mu\nu}$ の反対称性からゲージ条件が満たされることがわかる. このときパウリスピン行列の性質により,

$$gA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -g\varepsilon_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\nu\psi\,\partial^\mu\phi = g\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\,\partial_\mu\phi = \partial_\mu\phi\,J_5^\mu \tag{9.217}$$

すなわちスピノルとゲージ場の結合は, 適当なカイラル変換 (9.214) により, 打ち消すことができる. これにより残るゲージ場のラグランジアンは,

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\phi\,\partial^\mu\partial^\nu\phi \tag{9.218}$$

となり, カイラルアノマリー項は部分積分の後,

$$-\frac{g^2}{4\pi}\phi\varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{g^2}{2\pi}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \tag{9.219}$$

となる.

例題9.12: (9.217) , (9.218) および (9.219) を確かめよ.

経路積分の測度はスカラー・モードについての積分のみとなり, ラグランジアンは,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\phi\,\partial^\mu\partial^\nu\phi - \frac{g^2}{2\pi}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \tag{9.220}$$

となる. これから, 鞍点法による計算は, 運動方程式,

$$\Box\left(\Box+\frac{g^2}{\pi}\right)\phi=0 \tag{9.221}$$

の解を用いることに対応する. (9.221) の解は,

$$\left(\Box+\frac{g^2}{\pi}\right)\phi=\Lambda \tag{9.222}$$

を満たすものとしてあらわせる. ただし Λ は $\Box\Lambda=0$ を満たす関数で, ϕ に外場としてはたらく. この 4 階の運動方程式には質量項 g^2/π があらわれ, この項が力学的な質量生成のメカニズムに対応する.

最終的に得られた経路積分にあらわれる作用は, ϕ と ψ について 2 次なので厳密に積分できる. もとのゲージ場とスピノルが結合している理論での時間順序積は, 次のテクニックによって計算できる. ゲージ場とスピノル場とを分離するために施したカイラル変換によってスピノル場が位相分だけずれる. 2 成分スピノルであらわすと, この対応は

$$\langle\,\psi_a(x)\cdots\rangle\;\rightarrow\;\langle\,\exp[\pm ig\phi(x)]\psi_a(x)\cdots\rangle \tag{9.223}$$

で与えられる. ここで $a=1$ のときマイナス符号, $a=2$ のときプラス符号をとる. この位相は次のように書き換えることによって経路積分の作用に吸収することができる.

$$\exp[\pm ig\phi(x)]=\exp\left\{i\int d^2z\,g\delta^2(z-x)\phi(z)\right\}\,. \tag{9.224}$$

従って作用には, T 積の中の各スピノル場に対応して, そのスピノル場の時空点にデルタ関数型の外場が生じることになる. この位相項は ϕ について 1 次なので, 依然として厳密に解くことができる. この結果を用いると, シュウィンガー・モデルの基底状態でスピノル粒子の束縛状態が形成されること, つまりフェルミオン凝縮が起こることがしめせる. シュウィンガー・モデルのこれらの性質をしめすことは, 本書の水準を越えている.

9.6 古典解

4章では, 量子力学の経路積分で運動方程式の古典解がどのような役割を持つかについて議論した. それら古典解は, 系の基底状態の配位として可能なものをあらわしたり, 異なる時間の異なる真空の間のトンネル・振動のおきる振幅を求めるのに用いられたりした. これは場の理論でも同様で, 様々な計算は鞍点法によって行なう. 運動方程式の古典解は系のダイナミクスの非線形な側面もとらえているので, その大方の性質は量子系にもひきつがれると広く信じられている. こういう点から, スカラー理論でツリー近似で得られる場の真空期待値は, 定数で並進不変な古典解を使って基底状態の非線形な振舞いを記述しているものとみることができる. 非可換ゲージ理論の場合にはすでにみたように, 純ゲージの配位がゲージ場の運動方程式の古典解になっており, 経路積分の測度はホモトピー数に応じた離散的な部分空間に分かれて, いわゆる θ 真空の存在がしめされる. この節では古典解の持つこれらの側面について議論する.

9.6.1 キンク解

ここでみる最初の例は, 1 + 1 次元のスカラー理論で, 自明でない性質を持つ静的な古典解が存在する理論だ. そのような理論は,

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi) = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \tfrac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \tfrac{1}{4}\lambda\phi^4 \tag{9.225}$$

というおなじみのラグランジアンから得られ, 運動方程式は,

$$\Box\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi - \mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0\,. \tag{9.226}$$

この方程式は定数解

$$\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{9.227}$$

以外にも古典解,

$$\phi_c(x) = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tanh\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}(x - x_0)\right) \tag{9.228}$$

を持つ. ここで x_0 は任意である. また, ヤコビの楕円関数であらわされる, 静的で空間的には周期的な無限個の解が存在するが, それについてはこの節の後の部分でユークリッド時空での量子力学を議論するところでふれることにする.

ハイパボリック・タンジェント関数の性質から, 解 (9.228) は (9.227) の二つの定数解の間を結ぶ形になっているので, 通常**キンク解** (kink solution) と呼ばれている. 他の場の理論で, 二つの波が衝突し, 離れた後にまた元の波形を崩さずに保つような古典解が存在するものもある. このような解は**孤立波** (soritary wave) , もしくは**ソリトン** (solitons) と呼ばれる [24]. $V(\phi) = \beta\cos(\alpha\phi)$ で与えられるサイン・ゴルドン理論にこの性質を持つ古典解が存在する. キンク解にはこの性質はなく, したがってキンク解はソリトンではない.

また, (9.228) の解をブーストすることによって, 時間に依存する解,

$$\phi_c(x,t) = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tanh\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\gamma(x - x_0 - vt)\right) \tag{9.229}$$

を構成することもできる. ここで $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$ だ. これは単に速度 v で動くキンクをあらわしている. この解のパラメーター x_0 と v を適当に選んでキンクの中央を $t = t_-$ で $x = a$, $t = t_+$ で $x = b$ にすることができる. $t_\pm = \pm\frac{1}{2}T$ にとった場合, パラメーターは以下のようになる.

$$v = \frac{b-a}{T}, \quad x_0 = \tfrac{1}{2}(a+b)\ . \tag{9.230}$$

$T \to \infty$ の極限をとると, 当然古典的な静的キンク解に対応する $v = 0$ の場合に帰着する.

(9.227) の古典解に対応する並進不変な基底状態のかわりに, キンク解に対応する量子状態を考えることもできる [25]. そのような基底状態を $|\phi_c, a, t\rangle$

とあらわすと,

$$\langle\phi_c, a, t|\,\phi(x,t)\,|\phi_c, a, t\rangle = \phi_c(x,t)\;. \tag{9.231}$$

ここで a はキンクの中央をあらわす. この状態について詳しく述べる前に, 少し寄り道をする. ハミルトニアンの正準形式に解 (9.229) を代入するとキンク解と並進不変な解のエネルギーの差は,

$$H_{\text{kink}} - H_{\text{constant}} = \frac{M}{\sqrt{1-v^2}} \tag{9.232}$$

となることがわかる. ここで $M = 2\sqrt{2}\mu^3/3\lambda$ であるが, これは$1+1$ 次元の理論では λ は (長さ)$^{-2}$ の次元を持つため, 質量に対するあまりなじみのない表式になっている.

例題 9.13: (9.232) 式を確かめよ.

(9.232) の結果は一定速度で進む質量 M の粒子と同じ形だ. λ が小さいとき, この粒子の質量は (9.227) の基底状態に対応する粒子の質量 $\sqrt{2}\mu$ に比べ非常に大きくなる. この簡単なモデルにおいて, キンク解は系に許される素励起ではあるが, その質量は非常に重く, 通常の軽い粒子の励起とは区別されると思われる.

このような状態を正準量子化の手続きから構成するのは難しい. もし自由場のスペクトルが決定されて, キンク解に相当する状態がフォック空間に含まれるとすれば, その状態は 6.8 節で導入した表式を適当に拡張した, コヒーレント状態として表されるであろう. このコヒーレント状態を使ってキンクの漸近的基底状態が表され, キンクを含んだS 行列要素が定義される. しかし, この方法だとキンクはあらかじめ選んだ解にしたがって時間発展することになる. さらに系に存在する粒子と相互作用するかどうかもその解によって決められることになる. 例えば(9.229) の解は一定速度で進むキンクを表し, 運動量を変えることができないことから, 少なくとも直観的には自由粒子に相当するものと考えられる.

このジレンマを解決するために, キンクの中心の位置を表す量子力学的座標 Q を導入する [26]. 古典解の形は $\phi_c(x-Q)$ となる. in 状態と out 状態は次のような直積で表される.

$$|P\rangle_{\rm in} = |p\rangle \otimes |a\rangle \ . \tag{9.233}$$

$|p\rangle$ はフォック空間に出てくる粒子数固有状態で, $|a\rangle$ は**集団座標** (collective coodinate) と呼ばれる, 演算子 Q の固有状態だ. すると Q の固有値も経路積分での積分変数となり, この積分によって並進不変性が回復され, 系の運動量が保存されるようになる.

これが (9.225) の簡単な例でどのようにはたらくかをみる. 状態 $|\phi_c, t_-, b\rangle$ と状態 $|\phi_c, t_+, a\rangle$ の間の遷移振幅は経路積分で,

$$\langle\, \phi_c, t_+, b \,|\, \phi_c, t_-, a \,\rangle = \int_{\phi_c(a)}^{\phi_c(b)} \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ i \int d^2x \left[\mathcal{L}(\phi) + J\phi \right] \right\} \tag{9.234}$$

と書かれる. これは (6.237) 式を運動量積分すれば得られる. ソリトンがあるときの境界から来る位相は

$$\int dx \, \left[\phi_c(x-b)\dot{\phi}_c(x-b) - \phi_c(x-a)\dot{\phi}_c(x-a) \right] = 0 \tag{9.235}$$

となり, 消えることがわかる.

(9.234) にあらわれる経路積分の境界条件は, ϕ を (9.230) のパラメーターで与えられる解 (9.229) の分だけずらして吸収することができる. すぐ後にわかるように, パラメーター a, b に依存する項は残しておかなければならない. 作用を展開すると,

$$\int d^2x \, \mathcal{L}(\phi + \phi_c) = \int d^2x \left[\mathcal{L}(\phi_c) - \tfrac{1}{2}\phi \left(\Box + \frac{\partial^2 V}{\partial {\phi_c}^2} \right) \phi + \ldots \right] \ . \tag{9.236}$$

今の場合,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial {\phi_c}^2} = 2\mu^2 - 3\mu^2 \mathrm{sech}^2(x - \tfrac{1}{2}(a+b) - vt) \tag{9.237}$$

となる. キンクの存在することからポテンシャルは (9.237) となり, その周りのゆらぎをあらわす場 ϕ のスペクトルはこれから決まる. しかし作用の空間

積分の境界条件から明らかなように, (9.236) の右辺第一項は a や b によらないので落としてもよい.

この経路積分を評価するための標準的な方法は以下の通りだ. まずユークリッド化された固有値方程式,

$$\left(\Box_E + \frac{\partial^2 V}{\partial {\phi_c}^2}\right)\phi_n = \lambda_n \phi_n \tag{9.238}$$

を解き, 場の揺らぎを固有モードで展開する. そうして場の積分を, その展開係数についての積分に置き換えるとよい. しかし静的でないキンクに対しては, ポテンシャル(9.237)のユークリッド形は複素数になるために困難が生じる. ポテンシャルが複素数になると固有値方程式がエルミートでなくなり, 固有モードは完全系を張らなくなる. 今の場合 $v \to 0(T \to \infty)$ の極限でエルミート性が回復する. 固有モードを

$$\phi_n = u_n(x)e^{i\omega\tau} \tag{9.239}$$

の形に仮定すると, 固有値方程式は明らかにエルミートな形になる.

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial {\phi_c}^2}\right)u_n(x) = (\lambda_n - \omega^2)u_n(x) \equiv \omega_n^2 u_n(x)\,. \tag{9.240}$$

(9.240) で $\mu x/\sqrt{2} = z$ とすると, キンクの存在するもとでのモード方程式は,

$$\left[-\tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2} + (3\tanh^2 z - 1)\right]u(z) = \frac{\omega^2}{\mu^2}u(z) \tag{9.241}$$

となる. この方程式は厳密に解くことができる. 無次元の変数 z を用いて, 離散スペクトルとしては2つ,

$$\begin{aligned} &\omega_0^2 = 0\,,\ \ u_0 = \mathrm{sech}^2(z)\,, \\ &\omega_1^2 = \tfrac{3}{2}\mu^2\,,\ \ u_1 = \tanh(z)\,\mathrm{sech}(z) \end{aligned} \tag{9.242}$$

が得られ, 連続スペクトルとしては,

$$\begin{aligned} &\omega_p^2 = p^2 + 2\mu^2\,, \\ &u_p = \exp\left(\frac{i\sqrt{2}pz}{\mu}\right)\left[3\tanh^2(z) - 1 - \frac{2p^2}{\mu^2} - i\frac{3\sqrt{2}p}{\mu}\tanh(z)\right] \end{aligned} \tag{9.243}$$

が得られる．但しこれらの解は規格化されていない．ゼロ・モードがあり，そのモードについての積分が発散するので，この場合ガウス近似がうまくいかないことがわかる．

ゼロ・モードが生じるのは何もキンクに特有のことではなく，古典解を用いたときには必ず起きることだ．今の場合，Vの形に関わらず固有値ゼロの固有関数は常に $\partial_x \phi_c$ に比例する形で存在する．このことは静的な運動方程式 (9.226) から得られる次式からわかる．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 \phi_c}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial \phi_c}\right)=\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial {\phi_c}^2}\right)\frac{\partial \phi_c}{\partial x}=0\ . \tag{9.244}$$

M^2 を積分の値として，

$$M^2=\int dx\,\left(\frac{\partial \phi_c}{\partial x}\right)^2 \tag{9.245}$$

と定義すると，規格化された固有関数 $u_0=\partial_x\phi_c/M$ はゼロ固有値を持ち，(9.240) の他の解全てと直交する．このモードが生じるのは，もともと (9.228) に出てきた x_0 が任意であったことによるが，結局のところこれは元の理論が並進不変であったことの結果である．こうしたことから，このモードは**並進モード** (translational mode) と呼ばれる．

しばらくの間ゼロモードがあることを無視し，先にガウス近似がこういったよく定義されていないときに生じる問題を明らかにする．標準的な手続きに従い，場をユークリッド形で展開すると，

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{n\neq 0}\int\frac{d\omega}{2\pi}\,\left[a_n(\omega)u_n(x)e^{i\omega t}+a_n^*(\omega)u_n^*(x)e^{-i\omega t}\right]\\ &\quad +\int\frac{d\omega}{2\pi}\,q(\omega)u_0(x)\cos\omega t\end{aligned} \tag{9.246}$$

となる．経路積分の測度は，

$$\mathcal{D}\phi=\prod_\omega dq(\omega)\prod_n da_n^*(\omega)\,da_n(\omega) \tag{9.247}$$

で定義される．外場項を加え，ユークリッド経路積分を鞍点法で評価すると，

$$\langle\,\phi_c,t_+,b\,|\,\phi_c,t_-,a\,\rangle_J=$$

$$\left[\det\left(\Box_E + \frac{\partial^2 V}{\partial {\phi_c}^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int d^2x\, d^2y\, J(x)\Delta_E(x-y)J(y)\right\} \quad (9.248)$$

となる. ここでユークリッド時空のプロパゲーターは,

$$\begin{aligned}\Delta_E(x-x') &= \sum_{n\neq 0}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2+\omega_n^2}u_n^*(x)u_n(x') \\ &\quad + \int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{u_0(x)u_0(x')}{\omega^2}\cos\omega t\,\cos\omega t'\,. \qquad (9.249)\end{aligned}$$

例題 9.14: (9.249) を確かめよ.

(9.249) の中で, 並進モードからの寄与である二番目の積分は赤外発散することがわかる. それと同時に行列式の中にゼロ固有値があるために (9.248) 式は意味のないものになる. これら二つの問題は両方とも集団座標を導入することにより解決される [26]. 展開 (9.236) で場は, $\phi \to \phi + \phi_c$ とずらす. 古典解は,

$$\phi_c(x) = \phi_c\left(x - \frac{q}{M}\right) \qquad (9.250)$$

と書かれ, テイラー展開により,

$$\phi_c\left(x-\frac{q}{M}\right) = \phi_c(x) - \frac{q}{M}\partial_x\phi_c(x) + \ldots = \phi_c(x) - qu_0(x) + \ldots\,. \qquad (9.251)$$

... の部分は q^2 の高次の項をあらわす. これらの項は相互作用項となるので, プロパゲーターには関係しない. q をフーリエ展開すると,

$$q(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, q(\omega)\cos\omega t \qquad (9.252)$$

となり, (9.251) 右辺の第二項は (9.246) の並進モードと打ち消し合うことになる. そして場の変換は,

$$\phi + \phi_c = \tilde{\phi} + \tilde{\phi}_c \qquad (9.253)$$

と書き換えることができる. ただし,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= \sum_{n\neq 0}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\left[a_n(\omega)u_n(x)e^{i\omega t} + a_n^*(\omega)u_n^*(x)e^{-i\omega t}\right] \\ \tilde{\phi}_c &= \phi_c\left(x-\frac{q}{M}\right) + \frac{q}{M}\partial_x\phi_c(x) \qquad (9.254)\end{aligned}$$

である. プロパゲーターの赤外発散はなくなっており, 行列式のゼロ固有値もなくなっている. よって経路積分は再びよく定義されたものとなった.

もちろん, 解析の最初からこのような形で古典解を用いる方が良い. すると場の変換は,

$$\phi + \phi_c\left(x - \frac{q}{M}\right) = \phi - \frac{q}{M}\partial_x\phi_c(x) + \phi_c(x) + \phi_r(x,q) \tag{9.255}$$

となる. ϕ_r は テイラー展開で生じる q の二次以上の項をあらわす. 作用を q によらない ϕ_c の周りで展開し, 一連の ϕ と q についてのファインマン則を導くこともできる. 集団座標 q はキンクの位置演算子としてはたらき, 生成汎関数はその境界条件として in と out でのキンクの位置を持つ. 集団座標のおかげで並進不変性が回復する.

例題 9.15: $\langle\,\phi_c, a, t_+\,|\,\phi_c, b, t_-\,\rangle$ は 外場項がないときは$a-b$ のみの関数であることをしめせ.

漸近的な基底状態はいつものように, 運動量固有状態で展開する.

$$\langle\,\phi_c, p, t_+\,|\,\phi_c, p', t_-\,\rangle = \int\frac{da}{2\pi}\,\frac{db}{2\pi}\,\langle\,\phi_c, a, t_+\,|\,\phi_c, b, t_-\,\rangle e^{ip'b}e^{-ipa}\ . \tag{9.256}$$

これはソース項がないとき $a-b$ にしか依らないことから,

$$\begin{aligned}&\langle\,\phi_c, p, t_+\,|\,\phi_c, p', t_-\,\rangle = \\ &\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{2\pi}\,\frac{dy}{2\pi}\,\langle\,\phi_c, x, t_+\,|\,\phi_c, 0, t_-\,\rangle e^{-i\frac{1}{2}(p-p')y}e^{-i\frac{1}{2}(p+p')x}\end{aligned} \tag{9.257}$$

が言えて, y 積分をすると $\delta(p-p')$ が生じる. これは粒子の散乱がないときにはキンクの運動量が保存することを意味する. 漸近状態に粒子も存在するときは結果は異なるが, それについては本書の範囲を越えるので略す.

9.6.2 真空のトンネル効果

古典解を用いる他の例として, 縮退した基底状態間の遷移がある. 簡単のために, ここでは量子力学を用いてその考え方を述べるが, これは場の理論や

宇宙初期の問題においても応用され, 大変重要な結果が得られている[6]. アイデアは簡単で, 4.5 節でその概要を述べた. 準安定な状態にある系が冷やされて, より低い状態に遷移するとき, その遷移確率はポテンシャル障壁と高さを幅で決まるということだ.

ふつうの波動力学では, 障壁の両側で波動関数がゼロでない値を持つことからトンネル現象が起きる. この現象を経路積分で扱うためには, 不安定な系の振舞いについて理解する必要がある. 最も簡単な例は, $V(q) = -\frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ であらわされる反発力のもとにある粒子の量子力学だ. このときポテンシャルに下限がないので, 量子力学的に安定な基底状態は存在しない. $q = 0$ の場所は $\partial V/\partial q = 0$ を満たし, 不安定な基底状態をつくる.

この不安定な基底状態間の遷移率 $\langle\, q = 0, T\,|\, q = 0, 0\,\rangle$ を決めるのに経路積分が用いられる. この行列要素は標準的な調和振動子の行列要素から振動数ω についての解析接続により得られる. 調和振動子の ω を虚数に解析接続すると明らかに今のポテンシャルが得られ, 3.3 節の結果を用いれば, 求める行列要素は,

$$\langle\, q = 0, T\,|\, q = 0, 0\,\rangle = \left(\frac{im\omega}{2\pi \sinh \omega T}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.258}$$

となる. これは $T \to \infty$ で $\exp -\frac{1}{2}\omega T$ に比例する. このように $|q = 0\rangle$ という状態は量子力学的に不安定で, その崩壊率は ω で与えられる. 状態の不安定性が, 経路積分でラグランジアンにあらわれる微分演算子の行列式からあらわれるということが重要だ.

ここでユークリッド形式についてみてみよう. ウィック回転した経路積分では, 作用は,

$$i\int dt\,[\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)] \;\to\; -\int d\tau\,[\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)]\,. \tag{9.259}$$

この作用を極小にする配位は,

$$m\frac{d^2q}{d\tau^2} - \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \tag{9.260}$$

の解として得られる．この方程式は，$V(q)$ を $-V(q)$ に置き換えたときのオイラー・ラグランジュ方程式だ．これを解くときの境界条件は，経路積分のそれにあわせておかねばならない．このようなユークリッド解のことを**インスタントン**(instanton) という．作用をインスタントンの周りで展開し，鞍点法を用い，さらに実時間に解析接続で戻すことにより系の不安定性を決める行列式を近似する．この手法の利点は，ユークリッドでの運動方程式の解の性質を調べるのに，ポテンシャル $-V(q)$ をもつ古典力学のエネルギー保存等の議論が使えるところにある．もともとインスタントンという用語は，後ほど述べるヤン・ミルズ理論におけるユークリッド解のことであったが，今ではユークリッドでの運動方程式の解で，有限な作用を与えるものはすべて**インスタントン**と呼ばれる．

ポテンシャルが $-\frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ の場合について，この方法を説明する．運動方程式は

$$m\frac{d^2q}{d\tau^2} - \frac{\partial V}{\partial q} = m\frac{d^2q}{d\tau^2} + m\omega^2 q = 0 \, . \tag{9.261}$$

境界条件を $\tau = 0$ と $\tau = T$ で $q = 0$ とすると，$q_c = 0$ が一つの解となる．この周りで展開すると微分演算子

$$D = -m\frac{d^2}{d\tau^2} - m\omega^2 \tag{9.262}$$

が得られる．経路積分の境界条件より，この固有値方程式には$\tau = 0$ と $\tau = T$ でゼロになるという条件が課せられる．その結果，固有値は

$$\lambda_n = m\frac{n^2\pi^2}{T^2} - m\omega^2 \tag{9.263}$$

となる．n や ω がいくらであっても T が十分大きくなると固有値 λ は負になることがわかる．4.5 節で議論したように，ユークリッド領域でゼロや負の固有値があらわれると，ガウス近似はそれらのモードについて定義できないので破綻してしまう．結局経路積分で量子状態の不安定性をしめす目安は，T のある領域についてプロパゲーターを評価する際 D に負のユークリッド固有値が存在するかどうかだ．

この問題は作用を極大ではなく極小にする古典的軌跡を求めることとも関係している．ラグランジアンが $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ で与えられる簡単な場合に話を限る．作用を古典解の周りで $x = x_c + q$ のように展開する．x_c は境界条件を満たす古典解で q はそのまわりの揺らぎをあらわす．古典レベルでは q は解のまわりの微小変分と捉えられ，解の安定性を議論するのに用いられる．x_c が少なくとも作用の極小点であったなら，微小変分 q は作用の値を増大させるはずである．作用は，

$$S = S\big|_{x_c} + \delta S\big|_{x_c} + \frac{1}{2}\,\delta^2 S\Big|_{x_c} + \dots \tag{9.264}$$

と展開され，x_c が古典解であることから第二項は消える．部分積分すると第三項は

$$\frac{1}{2}\,\delta^2 S\Big|_{x_c} = -\int_{t_a}^{t_b} dt\, q\left(m\ddot{q} - \left.\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q^2}\right|_{x_c} q\right) . \tag{9.265}$$

これから境界条件 $q(t_a) = q(t_b) = 0$ のもとに固有方程式

$$m\ddot{q}_n - \left.\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q^2}\right|_{x_c} q_n = -\lambda_n q_n \tag{9.266}$$

が得られる．この固有関数は直交系をなすものとする．揺らぎ q は一般に (9.266) の解の重ね合わせであらわされる．

$$q = \sum_n a_n q_n\ . \tag{9.267}$$

(9.267) を (9.266) に代入すると，直交性を用いて

$$\delta^2 S\Big|_{x_c} = \sum_n \frac{1}{2}\lambda_n {a_n}^2 \tag{9.268}$$

がしめされる．すべての λ_n が正のとき，この古典解のまわりのあらゆる揺らぎは作用を増大させることになる．したがってその場合，この解は少なくとも極小点にはなっている．しかしどれかが負になっているときには軌跡 x_c の近くに作用をより小さくする他の軌跡が存在し，x_c は作用を極小化しないことになる．

作用を極小化する古典的軌跡を求める問題は, 経路積分の安定性を決める量子力学的問題と非常によく似ているので, 古典的問題で得られた結果は量子力学の問題にも援用できる. 特にモース理論[27]から得られるいくつかの結果は有用だ. 例えば, 与えられた問題に対し, 負の固有値が存在するかどうか判定するのに, 次のような簡単な基準がみつかる. 二点間を $T = t_b - t_a$ の時間間隔で結ぶ古典軌道を, 運動量初期値 p でパラメーター付けし, $x_c(p,t)$ とあらわすとする. このときに間隔 $t_b - t_a$ で,

$$\frac{\partial x_c(p,t)}{\partial p} = 0 \tag{9.269}$$

となる各 t それぞれに対応して (2.266) に負の固有値が生じる. すなわち古典軌道の持つ**ノード** (node) の数と同じだけ負固有値のモードが存在する. この定理の一般的な証明は参考文献[27]を参照してもらいたい. ここではポテンシャルが $V(q) = -\frac{1}{2}kq^2$ という簡単な場合にどのようになるかを見てみよう. 間隔 $T = t_b - t_a$ で $(t = t_a, q = 0)$ から $(t = t_b, q = 0)$ を結ぶ古典ユークリッド軌道は,

$$x_c = A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \tag{9.270}$$

で与えられる. ここで T は $n\pi = \omega T$ を満たす. n は $n = \omega T/\pi$ で与えられる整数だ. 容易に分かるように x_c は n 個の転回点, すなわちノードを持つ. これは n 個の負固有値を意味するが, (9.263) から得られる結果に一致している.

このテクニックは任意のポテンシャル $V(q)$ に適用できるが, 結果の解釈には注意を要する. ユークリッド形式では遷移要素は時間間隔を大きくしていったとき, 基底状態からの寄与が主要となる. 基底状態が縮退していない場合は, すぐに分かるように, $\tau \to \infty$ でユークリッド遷移要素は

$$\langle q, \tau \,|\, q, 0 \rangle = \sum_n \langle q \,|\, n \rangle \langle n \,|\, q \rangle e^{-E_n \tau} \;\to\; |\psi_g(q)|^2 e^{-E_g \tau} \tag{9.271}$$

となる. ここで E_g は系の基底状態のエネルギー, $\psi_g(q)$ は基底状態の波動関数だ. 量子力学においては, インスタントンの方法により基底状態の性質が

近似的に求まる.

簡単な例で, ポテンシャルが

$$V(q) = \frac{1}{2}\lambda(q^2 - a^2)^2 \tag{9.272}$$

のときの $q = 0$ での振舞いを見てみよう. $q = 0$ で $\partial V/\partial q = 0$ となっているが, $q = 0$ を中心に持つ波束は $\pm a$ に中心を持つ二つの井戸に向かって次第に拡散してゆく.

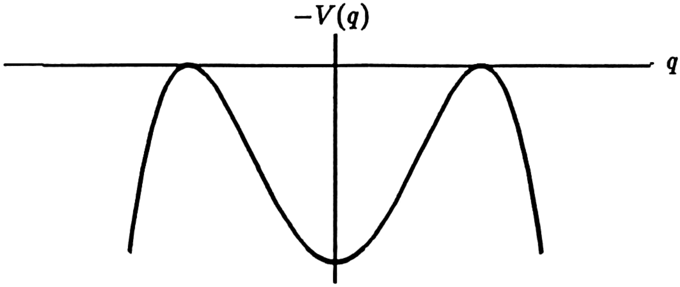


図9.2 ポテンシャル $-V(q) = \frac{1}{2}\lambda(q^2 - a^2)^2$

このポテンシャルのユークリッド版 $-V(q)$ は 図9.2 にある通りである. ユークリッド領域で極大点 $q = 0$ は井戸となり, $q = \pm a$ の井戸は極大点となることがわかる. $q = 0$ での基底状態の波動関数を与える遷移要素 $\langle q = 0, T \,|\, q = 0, 0 \rangle$ には, 粒子が $q = 0$ にある井戸の底からどちらか一方の極大点に向かってかけ登り, 頂点またはその手前で引き返してきて時間 T 後にもとの $q = 0$ に戻ってくるという運動に対応するユークリッド解が主に寄与する. これはいわゆるバウンス・インスタントンで, ユークリッド運動方程式

$$m\frac{d^2q}{d\tau^2} + 2\lambda a^2 q - 2\lambda q^3 = 0 \tag{9.273}$$

の周期 T を持つ解になっている. この解には転回点があるので, この軌跡に対しては負の固有値が1つあることになる.

(9.273) の解は, ヤコビ楕円関数の一つのモジュラ・サイン関数 $sn(t|T)$ で与えられる [28]. これらの解はエネルギー積分を使って積分表示することが

できる. 運動方程式からユークリッド・エネルギーは,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - V(q) = E \tag{9.274}$$

となり, 軌跡の上では定数でないといけない. (9.274) は一階の微分方程式を与え, 古典力学のときのように形式的に積分し, 解を E の関数としてあらわすことができる. もちろん (9.274) の中の E の値は T から決められる.

> **例題 9.16**: モジュラ・サイン関数の性質を用いて $T < (m/2\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ のとき (9.273) に自明な解しか存在しないことをしめせ.

T が小さいときには解が存在しないので, 経路積分のガウス近似は $q = 0$ の周りで, すなわち直接ユークリッド・ラグランジアン

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \lambda a^2 q^2 \tag{9.275}$$

に対して行なえばよい. その結果小さい T に対し, ガウス近似は

$$\langle\, q = 0, T \,|\, q = 0, 0 \,\rangle \;\propto\; \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda a^2}{2m}}\,T\right) \tag{9.276}$$

となる.

ヤコビ楕円関数にともなう負の固有値はここでは求めない [29]. (9.273) の古典解は, $T \to \infty$ ($E \to 0$) のとき特に簡単な性質を持つ. この場合 $q = a$ から $q = -a$ に至るユークリッド軌跡,

$$q_c(\tau) = a \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda a^2}{m}}\,\tau\right) \tag{9.277}$$

が存在する. この軌跡にはノードがない. この特別な場合にはこのユークリッド量子力学が前節で議論したキンク解を持つ簡単なスカラー理論とよく似通った側面を持つ. 固有モード u に対する固有値方程式は,

$$\left(-m\frac{d^2}{d\tau^2} + 2\lambda a^2 - 6\lambda a^2 \tanh^2(\tau)\right)u(\tau) = \omega u(\tau) \tag{9.278}$$

となり, (9.242) および (9.243) の解を用いて長時間の遷移要素 $\langle\, a, T \,|\, -a, -T\,\rangle$ のインスタントン近似を計算することができる.

例題 9.17: ゼロモードをうまく処理し, (9.242) および (9.243) を用いて遷移要素 $\langle a, T \,|\, -a, -T \rangle$ を $T \to \infty$ の極限で求めよ.

9.6.3 ヤン・ミルズ・インスタントン

7.6 節で議論したように, 非可換ゲージ理論の純ゲージ解は自明でない性質を持つ. 標準理論において, 自明でないトポロジーを持つユークリッドでの場の配位によりバリオン数非保存が起こりうることが前節を指摘した. θ 真空間の遷移要素を求めることにより明白にゲージ不変な経路積分が得られ, 純ゲージ解はゲージ変換に対応するので物理的な過程には寄与しないことがしめされた. では, 単なる純ゲージ解以外に自明でないトポロジーを持つユークリッド解があるだろうか. ゲージ場の θ 真空での生成汎関数はウィック回転した後に求めるので, そのような配位が遷移振幅に寄与し, バリオン数非保存を導く可能性がある.

ユークリッド経路積分はゲージ場の配位から得られる作用の値が大きい程, その寄与は小さく押えられる.

$$
{}_{+}\langle 0, \theta \,|\, 0, \theta \rangle_{-} = \sum e^{-S_E} \,. \tag{9.279}
$$

ユークリッド運動方程式の古典解に対応する配位はユークリッド作用を極小にするので, この配位が主に寄与するものと一般に考えられている. 以降, SU(2) ゲージ理論で議論し, ゲージ固定項はゼロにとっておく. ユークリッド作用は次のように正定値である.

$$
S_E = \int d^4x \left(\frac{1}{2} F^a_{0j} F^a_{0j} + \frac{1}{4} F^a_{ij} F^a_{ij} \right) \equiv \int d^4x \, \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 \geq 0 \,. \tag{9.280}
$$

ユークリッド運動方程式は行列形式で

$$
D_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\mu\nu} + ig[A_\mu, F_{\mu\nu}] \tag{9.281}
$$

ここで $\partial_\mu F^\mu_\nu = g^{\mu\rho}\partial_\mu F_{\rho\nu} = -\delta_{\mu\rho}\partial_\mu F_{\rho\nu} = -\partial_\mu F_{\mu\nu}$, および共変微分の交換子積についての同様のユークリッド時間空間での公式を用いた.

ユークリッド積分

$$\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,\left(F_{\mu\nu} \pm {}^*F_{\mu\nu}\right)^2 \geq 0 \tag{9.282}$$

の正定値性から重要な不等式が得られる. ${}^*F_{\mu\nu}{}^*F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ から,

$$S_E = \int d^4x\,\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu})^2 \geq \pm\tfrac{1}{2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu}) = \pm\frac{8\pi^2}{g^2}n \tag{9.283}$$

を得る. ここでゲージ場の配位は n 番目のホモトピー類に属しているとしている. 不等式は符号をどちらに取っても成り立つので, ユークリッド作用の下限

$$S_E \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|n| \tag{9.284}$$

が得られる. 等式は (9.282) の積分の中がゼロになるとき,

$$F_{\mu\nu} = \pm{}^*F_{\mu\nu} \tag{9.285}$$

となるときにのみ成り立つ. (9.285) のような場の配位は, 正符号のとき**自己双対** (self-dual), 負符号のとき**反自己双対** (anti-self-dual) と呼ばれる. 自己双対および反自己双対なゲージ場の配位は作用の最小値を与える [30].

自己双対な場の配位と運動方程式の解との間の関係は次のようになる. ユークリッドでの場の配位 A_μ に対し, それから得られる双対テンソル

$${}^*F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho + ig[A_\rho, A_\sigma]\right) \tag{9.286}$$

は自動的に運動方程式,

$$D_\mu\,{}^*F_{\mu\nu} = 0 \tag{9.287}$$

を満たす.

例題 9.18: (9.287) をしめせ.

場が自己双対もしくは反自己双対のとき, (9.287) から直ちに,

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{9.288}$$

となる. 従って（反）自己双対な場の配位は運動方程式の解で, それが属するホモトピー類でユークリッド作用を極小化するものとなっている. これらの解をヤン・ミルズ・インスタントンと呼ぶ.

これらの解の性質は詳しく調べられていて, SU(2) の場合, n 番目のホモトピー類に属するインスタントン解の一般形が分かっている. ここでは $n=1$ の場合についてのみ議論する. その他のインスタントン解を構成する一般的な方法はラジャラマンの本にある [24]. まず, SU(2) の行列を要素に持つ反対称テンソル $\Sigma_{\mu\nu}$ をパウリ行列 σ_j を用いて,

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ij} &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma_k && (i,j)=(1,2,3) \\
\Sigma_{0j} &= -\Sigma_{j0} = -\tfrac{1}{2}\sigma_j && j=(1,2,3) \\
\Sigma_{00} &= 0
\end{aligned} \tag{9.289}$$

と定義する. 定義から$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ が成り立ち, 従って自己双対だ. $\Sigma_{\mu\nu}$ を用いて $n=1$ のインスタントン配位は

$$A_\mu = \frac{1}{g}\Sigma_{\mu\nu}\frac{2(x_\nu - a_\nu)}{(x-a)^2+\lambda^2} \tag{9.290}$$

とあらわされる. ここで a_μ は任意のユークリッド4次元定ベクトルでλ は長さの次元を持つ任意の定数である.

(9.290) を $F_{\mu\nu}$ の定義に入れると,

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{g}\Sigma_{\mu\nu}\frac{4\lambda^2}{[(x-a)^2+\lambda^2]^2}\ . \tag{9.291}$$

$\Sigma_{\mu\nu}$ が自己双対なので $F_{\mu\nu}$ も自己双対となり, (9.290) が運動方程式の解となっていることがわかる. $x\to\infty$ の漸近領域で, 解 (9.290) は 7.6 節で述べた巻き数1のユークリッド純ゲージ解になっている.

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{1}{ig}\partial_\mu \mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^{-1}\ . \tag{9.292}$$

ここで $\mathbf{U}_1$ は

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{r}(x^0 + ix^j\sigma^j) \tag{9.293}$$

で与えられる. (9.291) から, この解のユークリッド作用は

$$S_E = \int d^4x \, \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \frac{48\lambda^4}{g^2}\int d^4x \, \frac{1}{(x^2+\lambda^2)^4} = \frac{8\pi^2}{g^2} \tag{9.294}$$

となり, (9.284) の不等式を満たす. ここで, ユークリッド空間の並進不変性を使い $a=0$ ととった. (9.290) が空間的にも時間的にも局在していることから**インスタントン**という名が付けられている.

(9.290) の解は漸近的に純ゲージであるだけなので真空の遷移振幅に寄与する. また, これはトポロジー的に自明でないので, バリオン数非保存をもたらす. ユークリッド領域で経路積分へのインスタントンの寄与は,

$$_+\langle 0,\theta\,|\,0,\theta\,\rangle_- \;\propto\; e^{-S_E} \tag{9.295}$$

の重み [21] で抑えられる. ここで $S_E = 8\pi^2/g^2$ だ. GSW モデルの SU(2) ゲージ場の場合, 結合定数 $g^{-2} \simeq 2.3$ の値が電弱過程から得られ,

$$e^{-S_E} \;\approx\; 10^{-80} \tag{9.296}$$

で, 大変小さな率になる. 高温効果がこの率を大幅に増やすという研究 [31] も現在なされているが, それらについては本書の程度を越えている.

9.6.4 アーベリアン 磁気モノポール

7.6 節で, マックスウェル方程式 $\nabla\mathbf{B}=0$ はゲージ場のトポロジー的性質の結果であることをみた. ゲージ場が正則ならば, この方程式は常に成り立つ. しかし, $\mathbf{A}$ として特異点を持つものも許すと $\mathbf{B}$ の発散はゼロでなくなり, 磁気モノポールが存在することになる.

静的な磁気モノポールは静的な球対称場をつくる.

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^2}\hat{r}\,. \tag{9.297}$$

ここで r は動径距離だ. この磁場は方程式

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 4\pi g\,\delta^3(\mathbf{x}) \tag{9.298}$$

の解である. 依然としてこの場は特異点をもつゲージ・ポテンシャル $\mathbf{A}$,

$$A_r = A_\theta = 0\,,\quad A_\phi = \frac{g}{r}\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \tag{9.299}$$

を用いて $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ とあらわせる [32].

> **例題 9.19**: (9.299) のゲージ・ポテンシャル から (9.297) の磁場が得られることをしめせ.

磁気モノポールはベクトル・ポテンシャルから得られるので, 量子力学や量子場の理論の中で, ゲージ不変性を損なうことなく通常の電磁結合の中に含めることができる.

そのかわりに, ゲージ不変なかたちで磁気モノポールを持ち込んだためゲージ場は特異点を持つようになる. (9.299) のゲージ場は $\theta=\pi$ で正則でなく, 特異点の "ひも" が $-z$ 軸に存在する. 特異点は孤立しておらず空間の半分にわたってひろがっているので, 原点を囲む体積積分や閉曲面積分ができなくなる. もちろん, このいわゆるディラックひもを $+z$ 軸方向に持ってゆくこともできる. その場合は,

$$A'_r = A'_\theta = 0\,,\quad A'_\phi = -\frac{g}{r}\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\,. \tag{9.300}$$

ディラックひもは物理的には意味がない. なぜなら上の 2 つのベクトル・ポテンシャルの違いは

$$\mathbf{A}-\mathbf{A}' = \frac{2g}{r\,\sin\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\phi \tag{9.301}$$

で与えられ, 球座標での勾配の形を用いて,

$$\mathbf{A}-\mathbf{A}' = \nabla\chi \tag{9.302}$$

とあらわすことができるからだ. ここで χ は方位角 ϕ のみの関数

$$\chi = 2g\phi \tag{9.303}$$

で与えられる. 結局 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}'$ はゲージ変換

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\chi \tag{9.304}$$

で結ばれる. 勾配と関数 χ の形から他の成分はこのゲージ変換で影響を受けないことがすぐにわかる. ディラックひもは次のようにして, 様々な物理量の計算から除くことができる[33]. すなわち上半面の計算には (9.299) で与えられる $\mathbf{A}$ を用い, 下半面の計算には (9.300) で与えられる $\mathbf{A}'$ を用いるのである. その結果ゲージ場の形は全空間でディラックひもを含まなくなる. このときゲージ変換 (9.304) は一価でなくなる. もしゲージ場が物質場と結合していたら, 運動方程式を変えないようなかたちで物質場も変換を受ける. 変換された物質場 ψ' は,

$$\psi' = e^{ie\chi}\psi \tag{9.305}$$

となる. この新しい関数は, もともとあった境界条件を満たすように一価でないといけない.

$$e^{ie\chi(\phi)}\psi(r,\theta,\phi) = e^{ie\chi(\phi+2\pi)}\psi(r,\theta,\phi+2\pi)\ . \tag{9.306}$$

これは位相が 2π の回転で元に戻ることを意味し, χ の形から

$$i4\pi eg = ie\chi(\phi+2\pi) - ie\chi(\phi) = i2\pi n \tag{9.307}$$

となる. これが (9.306) が成り立つための必要十分条件である. ここで n は任意の整数だ. ディラックの量子化条件 $eg = \frac{1}{2}n$ が再びあらわれるが, 今回は磁場のあらわな形から導かれた. 二つの半球でのゲージ場を結ぶゲージ変換は**ファイバー束** (fiber bundle)[34] で知られる一般的な数学的構造と関わりがある. 簡単に言って, ファイバー束は基底空間とファイバーと接続からなる. 今の場合, 波動関数が定義されている球面が基底空間で, 波動関数そのものが

ファイバー, ゲージ場がファイバーを経路に沿って動かしたときのファイバーの変化を決める接続だ. ファイバーが基底空間の開被覆にわたって動くとき, ファイバー束はトポロジー的に非自明となる.

ここで議論したアーベリアンの場合でも磁気モノポールには多くの著しい性質があり, それらが実験で確かめられることは大変重要な事柄である. 例えば, 電気モノポールと磁気モノポールの束縛状態は **ダイオン** (dyon) と呼ばれ, もとの粒子がともにボソンであってもフェルミオンとして振舞うことができる. これはこの対のまわりの電磁場の角運動量,

$$\mathbf{L}_{\rm em} = \int d^3x \left[\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\right] \tag{9.308}$$

を計算すればわかる. 静的な電気モノポールと磁気モノポールが距離 a だけ離れたときの E と B の形を代入すると,

$$\mathbf{L}_{\rm em} = -eg\,\hat{\mathbf{a}} \tag{9.309}$$

となる. ここで $\hat{a}$ は電荷から磁荷に向かう単位ベクトルだ.

例題 9.20: (9.309) をたしかめよ.

ディラックの量子化条件で n が奇数のとき, 角運動量は $\hbar$ の半整数倍となり, フェルミオン系をあらわす[35].

非可換理論の場合でもこれらの結果に相当することが言える. そこでもダイオンに対応する解が得られ, それらの解はトポロジー的に自明でない性質を持つ. そのような解がおよぼす効果の例として, 大統一理論などの非可換理論において, アノマリーを通じたバリオン数非保存過程の反応率が, モノポールによって増大するというものがある. 非可換理論のモノポールについてはここでは述べない[36].

9.7 有効ポテンシャルの応用

この節では有効ポテンシャルの応用についていくつか述べる．初めにユークリッド領域で有限温度のときの計算規則を導く．これらの規則と有効ポテンシャルの議論から，簡単なモデルにおいて臨界温度での対称性の回復について議論する．二つ目の応用として，対称な理論でスカラー場が質量ゼロにくりこまれる極限でのヒッグスモデルについて述べる．そこではコールマン・ワインバーグ機構といわれるダイナミカルな対称性の破れが生じる．三つ目の応用はグロス・ヌボーモデルだ．これは 1 + 1 次元フェルミオンの簡単なモデルで，複合場によるダイナミカルな対称性の破れをみる．

9.7.1 有限温度と対称性の回復

量子力学における分配関数は，ボソン，フェルミオンに対しそれぞれ 4 章と 5 章で与えた．有限温度の効果を場の理論に拡張して議論するには，グランドカノニカル和，

$$Z_\beta = \sum_n \langle n|\, e^{-\beta H}\, |n\rangle \;\equiv\; \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} \tag{9.310}$$

を導入すればよい．ここで和はすべての許される粒子状態の物理的部分空間についてとる．

分配関数のときと同様，グランドカノニカル和もユークリッド時間での経路積分と関係づけられる．最初に，簡単のためスカラー場の場合について考える．コヒーレント状態 $|\phi\rangle$ の完全性を用いて，(9.310) は

$$\begin{aligned} Z_\beta &= \sum_n \int \mathcal{D}\phi\, \langle\, n\,|\,\phi\,\rangle\, \langle\phi|\, e^{-\beta H}\, |n\rangle \\ &= \int \mathcal{D}\phi \sum_n \langle\phi|\, e^{-\beta H}\, |n\rangle\, \langle\, n\,|\,\phi\,\rangle = \int \mathcal{D}\phi\, \langle\phi|\, e^{-\beta H}\, |\phi\rangle \end{aligned} \tag{9.311}$$

と書きかえられる．コヒーレント状態間の遷移要素の式，

$$Z = \langle\, \phi, t\,|\,\phi, 0\,\rangle = \langle\phi|\, e^{-iHt}\, |\phi\rangle \tag{9.312}$$

の形から，この式をユークリッド時間に $t \to -i\beta$ のように解析接続し，ϕ で積分するとグランドカノニカル和が得られることがわかる．

遷移要素 (9.312) は経路積分で,

$$Z = \int_{\phi}^{\phi} \mathcal{D}\phi \exp\left\{ i \int dx \int_0^t d\tau\, \mathcal{L}(\phi) \right\} \tag{9.313}$$

とあらわされる. ここで in 状態と out 状態は同じにとっているので, 運動量はすでに積分されている. 時間を $-i\beta$ にウィック回転し, 周期的境界条件を満たすすべての場の配位について足し上げるとグランドカノニカル和が得られる.

これらのことからボソン系が有限温度になったときの規則が得られる. 場の配位における τ についての周期性から, このユークリッド場のフーリエ展開は[37],

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(i2\pi n \frac{\tau}{\beta} \right) \phi_n(\mathbf{x}) \tag{9.314}$$

となり, 普通のものとは異なる. 結局ボソンのスカラー場を有限温度化するには, ユークリッド領域で

$$\omega \to \frac{2\pi n}{\beta}, \ \int \frac{d\omega}{2\pi} \to \frac{1}{\beta} \sum_n \tag{9.315}$$

の置き換えをすればよいことがわかる.

フェルミオンの場合も同様にして置き換えの規則を得ることができる. グランドカノニカル和はこの場合, グラスマン値のコヒーレント状態 $|\eta\rangle$ を用いてあらわされる. この $|\eta\rangle$ についてはグラスマン数の非可換性から,

$$\langle n | \eta \rangle \langle \eta | n \rangle = \langle -\eta | n \rangle \langle n | \eta \rangle \tag{9.316}$$

がしたがう. するとグランドカノニカル和は,

$$\begin{aligned} Z_\beta &= \sum_n \int \mathcal{D}\eta \, \langle n | \eta \rangle \langle \eta | e^{-\beta H} | n \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\eta \sum_n \langle -\eta | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | \eta \rangle = \int \mathcal{D}\eta \, \langle -\eta | e^{-\beta H} | \eta \rangle \ . \end{aligned} \tag{9.317}$$

となる. グラスマン値のコヒーレント状態間の遷移要素は

$$Z = \langle -\eta, t | \eta, 0 \rangle = \langle -\eta | e^{-iHt} | \eta \rangle \tag{9.318}$$

となるので，この式で $t \to -i\beta$ の置き換えをして，η 積分をするとグランドカノニカル和が得られる．この遷移要素に対する経路積分表示は，

$$Z = \int_{\eta}^{-\eta} \mathcal{D}\eta \, \exp\left\{ i \int dx \int_0^t d\tau \, \mathcal{L}(\eta) \right\} \tag{9.319}$$

で，これをユークリッド領域に解析接続するとグランドカノニカル和になる．すなわちユークリッド時間 β で反周期的境界条件を満たすすべてのフェルミオン場の配位について和をとるとよい．このときユークリッド場のフーリエ展開は反周期性から，

$$\eta(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(i2\pi(n + \tfrac{1}{2}) \frac{\tau}{\beta} \right) \eta_n(\mathbf{x}) \tag{9.320}$$

となる．結局フェルミオン場を有限温度化するには，ユークリッド領域で

$$\omega \to \frac{2\pi(n + \frac{1}{2})}{\beta}, \quad \int \frac{d\omega}{2\pi} \to \frac{1}{\beta} \sum_n \, . \tag{9.321}$$

の置き換えをすればよい．

ゲージ場の場合は少し複雑になる．この場合物理的に許される状態についての和をとるときにゼロノルムのゴースト状態も含まれるが，これはグランドカノニカル和に寄与してはならない．ここで，ゲージ場のモードは元々はボソンであることに注意する．ゲージ場のコヒーレント状態でグランドカノニカル和をあらわしたとき，(9.316) のようなグラスマン性はない．だからグランドカノニカル和はユークリッド形の経路積分で，

$$Z_\beta = \int_{A_\mu}^{A_\mu} \mathcal{D}A \, \delta(\chi) \, \Delta_\chi \, \exp\left\{ i \int dx \int_0^t d\tau \, \mathcal{L}_\chi(A) \right\} \tag{9.322}$$

となる．ファデーエフ・ポポフ行列式 Δ_χ はスカラーのグラスマン変数 c と $\bar{c}$ を用いて作用の中に吸収される．もとの行列式には周期的境界条件が課せられているので，これらのグラスマン変数も β の間で周期的でないといけない．だからファデーエフ・ポポフゴーストもゲージ場も共にユークリッド形で

$$\omega \to \frac{2\pi n}{\beta}, \quad \int \frac{d\omega}{2\pi} \to \frac{1}{\beta} \sum_n \tag{9.323}$$

の置換えをしなければならない[38].

これらの規則をユークリッド領域での有効ポテンシャルに適用すると, 簡単なスカラーモデルで相転移が存在することがしめせる[2, 39]. ユークリッド領域での有効ポテンシャル (9.27) に有限温度化の規則(9.315) を使うと, 1 ループの寄与は $\hbar = 1$ として,

$$V_1 = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\left(\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + \mathbf{k}^2 + M^2\right) \tag{9.324}$$

となる. n についての和は,

$$\frac{\partial}{\partial R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(n^2\pi^2 + R^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2R}{n^2\pi^2 + R^2} = 2\coth R \tag{9.325}$$

を用いると得られる. (9.325) を積分し, R によらない, 物理的に意味のない無限大の定数を落とすと,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(n^2\pi^2 + R^2) = 2\ln\sinh R \tag{9.326}$$

となる. これを (9.324) に適用し, M によらない項を全部落とすと,

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\sinh\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varepsilon_k + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\left(1 - e^{-\beta\varepsilon_k}\right) \end{aligned} \tag{9.327}$$

となる. ここで

$$\varepsilon_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2} \tag{9.328}$$

である.

(9.327) にある第一項の積分は β によらず, 前のゼロ温度のときの結果 (9.29) に等しい. 第二項の積分は有限であり$\beta \to \infty$ の極限で消えるので有効ポテンシャルに対する有限温度による寄与をあらわす. すべての発散は有効ポテンシャルのゼロ温度の部分に入っているというのは一般的に言えることで, 有限温度効果は理論のくりこみを変えることはない.

特にこの結果を

$$V(\phi) = -\tfrac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \tfrac{1}{4}\lambda\phi^4 \tag{9.329}$$

となっている場合に適用してみる．このモデルで対称性の自発的破れが起きるのは，くりこまれた質量項の係数が負になる場合だ．もしこの係数が正ならば$\phi_0 = 0$ の対称な真空しか実現しない．これからしめすように，ϕ_0^2 の項に対する有限温度の寄与を計算すると，十分高温でこの係数が正になることがわかる．

今考えているモデルでは M^2 の値は，

$$M^2 = \frac{\partial^2 V(\phi_0)}{\partial {\phi_0}^2} = -\mu^2 + 3\lambda{\phi_0}^2 \tag{9.330}$$

で与えられる．あきらかに $\phi_0 \to 0$ で M^2 の値は負になり，有効ポテンシャルを得るための経路積分のガウス近似が破綻する．4.5 節で量子力学の問題について，また 9.2 節で有効ポテンシャルの凸性について同様の困難を議論した．それらのときと同様に，ここでも$\phi_0 = 0$ でのガウス近似は破綻するが，高次の効果でどこか別のところに安定点ができ，そのまわりでガウス近似を用いることができる．(9.327) の積分からすぐわかるように，$M^2 \simeq 0$ となるあたりで系は対称な真空の方に向かう．より詳しい相転移の様子を知るには，有効ポテンシャルを注意深く解析しなければならない．

対称性の回復を調べるためには，$\phi = 0$ の付近で計算を行なう必要性がある。そのためには，有限温度により μ がある有効定数 μ_{eff} に変化したとして，温度効果を μ_{eff} を使って計算すれば良い。そして，最後にこの μ_{eff} を矛盾なく決定する。このように計算すれば，その計算は$M_{\text{eff}} = -\mu_{\text{eff}} + 3\lambda\phi_0^2 \geq 0$ で正しい。対称性が回復する臨界点では$M_{\text{eff}}^2 \simeq 0$ であるから，この周りで，(9.327) で M を M_{eff} に置き換え、 M_{eff}^2 についてテイラー展開し，一次の項だけをとる．簡単な計算から，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial V_\beta}{\partial M^2}\right|_{M^2=0} &= \tfrac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{|p|}\,\frac{e^{-\beta|p|}}{1-e^{-\beta|p|}} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dp\,\frac{p\,e^{-\beta p}}{1-e^{-\beta p}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\beta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{24\beta^2} \tag{9.331}$$

がしめされる．したがって、

$$V(\phi_0) = -\frac{1}{2}\mu_{\text{eff}}^2\phi_0^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_0^4 - \frac{1}{2}(\mu^2 - \mu_{\text{eff}}^2)\phi_0^2 + \frac{M_{\text{eff}}^2}{24\beta^2} + \cdots.$$

この有効ポテンシャルの二次の項の係数は $\mu_{\text{eff}}/2$ と定義したので、$\mu^2 - \mu_{\text{eff}}^2$ は M_{eff}^2 の二次の項と打ち消し合わなければならない。これより有効ポテンシャルは,

$$V(\phi_0) = -\tfrac{1}{2}\left(\mu^2 - \frac{\lambda}{4\beta^2}\right){\phi_0}^2 + \cdots \tag{9.332}$$

となる．これより二次の項の係数 μ_{eff} は, 臨界温度$\beta_c^{-1} = 2\mu/\sqrt{\lambda}$ より高い温度で正になることがわかる．

もちろん理論に他の場が入っている場合, それらの寄与も考慮する必要がある．スカラー場が質量 m のスピノル場と湯川結合しているとき, すなわち

$$\mathcal{L}_I = -g\phi\bar{\psi}\psi \tag{9.333}$$

となっているとき, フェルミオンの寄与は

$$V_f(\phi_0) = -2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\varepsilon_p - \frac{4}{\beta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon_p}\right) \tag{9.334}$$

となることがわかる．ここで,

$$\varepsilon_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + (m + g\phi_0)^2} \tag{9.335}$$

である．

例題 9.21: (9.334) を確かめ, 有効ポテンシャルの展開にあらわれるϕ_0^2 の項に対する質量ゼロのフェルミオンによる寄与を, 最低次の近似で計算せよ．

9.7.2　コールマン・ワインバーグ機構

9.4 節で述べた標準理論を一般化しようとすると，多くの場合ファイン・チューニング問題[40]といわれる困難に遭遇する．これは QCD と電弱理論を統一するときにこれら QCD や電弱理論と大きく異なるエネルギースケールを理論に持ち込まないといけないことからくる．統一される前の理論におけるくりこみ群を用いた解析から，これら 2 つの有効結合定数はおよそ 10^{15} GeV 程度で同じ値になる．もしより大きな対称性をもつ統一理論が存在するなら，何故電弱スケールが 10^2 GeV のスケールを持っていて，統一のスケールよりも 10^{13} も小さいのかを説明できなくてはいけない．質量に対する輻射補正で生じる 2 次発散は一般に統一のスケールを持っており，その補正を含んだ上で小さなスケールを得るには非常に精度の高い相殺が起きる必要があり，統一理論のパラメーターを精密に微調整しなければならない．

コールマン・ワインバーグ機構では，このような大きく離れた質量スケールをもっと自然な方法で出すことができる．基本的なアイデアは，スカラー粒子の質量を対称な真空でゼロになるように有効ポテンシャルをくりこむというものだ．そのようなくりこみ条件で対称性の自発的破れが生じるためには，このスカラー場はゲージ場と結合していなければならない．これは標準的なゲージ不変ラグランジアン，

$$\mathcal{L}_g = D_\mu^* \phi^* D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{9.336}$$

で記述される．ここで可換ゲージ共変微分は，

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \, . \tag{9.337}$$

スカラー場のポテンシャルは標準的なゲージ不変な

$$V(\phi) = m_0^2 \phi^* \phi + \lambda_0 (\phi^* \phi)^2 \tag{9.338}$$

とする．

ここでも実場の基底

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \tag{9.339}$$

を用いて解析するとよい．ポテンシャルは位相変換で不変なので，ϕ の真空期待値は，

$$\langle 0|\,\phi\,|0\rangle = \frac{\phi_0}{\sqrt{2}} \tag{9.340}$$

のように実数にとることができる．このスカラー場のくりこまれた質量が，対称な真空でゼロとすると，スカラー場とゲージ場の質量行列は，

$$\begin{aligned} {M_s}^2 &= \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial {\phi_0}^2} = 3\lambda{\phi_0}^2 \,, \\ {M_g}^2 &= e^2{\phi_0}^2 \,. \end{aligned} \tag{9.341}$$

であることがすぐにわかる．9.2 節の結果から，正則化された有効ポテンシャルは，スカラー場とゲージ場の両方からの寄与を加えて，

$$\begin{aligned} V_{\rm eff}(\phi_0) &= \tfrac{1}{2}\delta m^2{\phi_0}^2 + \tfrac{1}{4}(\lambda+\delta\lambda){\phi_0}^4 + \frac{3\hbar\Lambda^2}{16\pi^2}(\lambda+e^2){\phi_0}^2 \\ &\quad + \frac{3\hbar}{64\pi^2}{\phi_0}^4\left[3\lambda^2\ln\left(\frac{3\lambda{\phi_0}^2}{4\Lambda^2}\right) + e^4\ln\left(\frac{e^2{\phi_0}^2}{4\Lambda^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{9.342}$$

となる．

有効ポテンシャルは，スカラー粒子の質量が対称な真空で正確にゼロになるようにくりこむ．それにはくりこみ条件，

$$\left.\frac{\partial^2 V_{\rm eff}}{\partial {\phi_0}^2}\right|_{\phi_0=0} = 0 \tag{9.343}$$

を課せばよい．このくりこみ条件は，

$$\delta m^2 = -\frac{3\hbar\Lambda^2}{8\pi^2}(\lambda+e^2) \tag{9.344}$$

とすると満たされる．

一方結合定数のくりこみは違ったやり方でおこなう．理論に質量スケールが存在しないため，(9.342) の中の対数項は赤外発散を含む．まさにこの赤外

発散によって, 理論の真空は対称な真空からずれていくのである. 簡単な計算により,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 V_{\text{eff}}}{\partial {\phi_0}^4} &= 6(\lambda+\delta\lambda)+\frac{75\hbar}{16\pi^2}(3\lambda^2+e^4)\\ &\quad+\frac{24\hbar}{64\pi^2}\left[\lambda^2\ln\left(\frac{3\lambda{\phi_0}^2}{4\Lambda^2}\right)+e^4\ln\left(\frac{e^2{\phi_0}^2}{4\Lambda^2}\right)\right] \qquad (9.345)\end{aligned}$$

がしめせる. 明らかにこの式は, $\phi_0 = 0$ では評価できない. かわりに結合定数は, $\phi_0 = \nu \neq 0$ であらわされる物理的な真空でのみ定義できると仮定しなければならない. このため, くりこみ条件は

$$\left.\frac{\partial^4 V_{\text{eff}}}{\partial {\phi_0}^4}\right|_{\phi_0=\nu} = 6\lambda \qquad (9.346)$$

ととる. これは,

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= -\frac{\hbar}{16\pi^2}\left[\lambda^2\ln\left(\frac{3\lambda\nu^2}{4\Lambda^2}\right)+e^4\ln\left(\frac{e^2\nu^2}{4\Lambda^2}\right)\right]\\ &\quad-\frac{25\hbar}{32\pi^2}(3\lambda^2+e^4) \qquad (9.347)\end{aligned}$$

とすれば満たされる. (9.344) と (9.347) をもとの (9.342) に代入すると, くりこまれた有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}(\phi_0) &= \tfrac{1}{4}\lambda{\phi_0}^4-\frac{25\hbar}{128\pi^2}(3\lambda^2+e^4){\phi_0}^4\\ &\quad+\frac{3\hbar}{64\pi^2}(3\lambda^2+e^4){\phi_0}^4\ln\left(\frac{{\phi_0}^2}{\nu^2}\right) \qquad (9.348)\end{aligned}$$

と得られる.

物理的真空を選ぶ条件は,

$$\left.\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi_0}\right|_{\phi_0=\nu} = \left[\lambda-\frac{11\hbar}{16\pi^2}(3\lambda^2+e^4)\right]\nu^3 = 0 \qquad (9.349)$$

である. これは, くりこまれた結合定数を $O(\lambda^2)$ の項を無視して,

$$\lambda = \frac{11\hbar}{16\pi^2}e^4 \qquad (9.350)$$

とすれば得られる. 結合定数がこの関係を満たしているとき, 有効ポテンシャルに対するスカラー場の寄与とゲージ場の寄与がつりあい, 赤外発散が相殺される. もともと理論には長さのスケールが入っていないので, 当然真空期待値は決まらない.

こうしたことにもかかわらず, スカラー場とゲージ場の質量の関係付けることはできる. スカラー場であるヒッグス粒子の質量は,

$$M_H{}^2 = \left.\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial {\phi_0}^2}\right|_{\phi_0=\nu} = \left(3\lambda - \frac{27\hbar e^4}{16\pi^2}\right)\nu^2 = \frac{3\hbar e^4}{8\pi^2}\nu^2 \tag{9.351}$$

である. ここで (9.350) を使った. プロカ・ボソンの質量は$M_g^2 = e^2\nu^2$ で与えられるので, それらの比は,

$$\frac{M_H{}^2}{M_g{}^2} = \frac{3e^2\hbar}{8\pi^2} \tag{9.352}$$

という小さな値に定められる. この量子効果は, 有効ポテンシャルに高次の項を含めても同様に成り立つことがしめせる. このような系にもヒッグス機構は働きうるので, それらの現象を一緒にすると, ファイン・チューニング問題を自然な形で解決する一貫した理論を得ることができる.

例題 9.22: 基本表現を用いたSU(2) ゲージ理論にコールマン・ワインバーグ機構を適用し, スカラー場とゲージ場の質量比を決定せよ.

9.7.3 グロス・ヌボーモデル

グロス・ヌボーモデル [42] は, $1+1$ 次元のスピノル場が 4 点の引力相互作用をする単純なモデルだ. $1+1$ 次元なのでくりこみ可能性は保証されている. $1+1$ 次元でのガンマ行列の代数については 9.5 節でシュウィンガーモデルを議論したときに述べた.

9.5 節の結果から質量を持つ $1+1$ 次元スピノルを含むローレンツ不変な理論として,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + im)\psi + g(\bar{\psi}\psi)^2 \tag{9.353}$$

が許される. g の符号は正にとっているので $\bar{\psi}\psi$ の値が大きいほどエネルギーが低く, この4点ポテンシャルは引力あらわす. 系の次元から ψ は (長さ)$^{1/2}$ の次元を持ち, g は無次元となる. 次数勘定の考察から, この理論はくりこみ可能であることがわかる. この4点関数をより高次元の時空に拡張しようとすると, 9.3 節で出てきたフェルミ相互作用と同様に理論はくりこみ不可能になってしまう.

スカラー場 σ を導入してラグランジアンを

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + im)\psi - \tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2 + \sqrt{2\alpha g}\,\sigma\bar{\psi}\psi \tag{9.354}$$

と書きかえても古典的には等価だ. このとき σ の運動方程式は

$$\sigma = \sqrt{\frac{2g}{\alpha}}\,\bar{\psi}\psi \tag{9.355}$$

で与えられ, これを (9.354) に代入すると, 無次元の任意の正の実数α に対し (9.353) が再現される. σ は実質的には複合場 $\bar{\psi}\psi$ をあらわす.

このことが量子論でも言えることが経路積分からわかる. (9.354) の理論の生成汎関数は,

$$Z = \int_{\sigma_0}^{\sigma_0} \mathcal{D}\sigma\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left\{i\int d^2x\,\mathcal{L}(\psi,\sigma)\right\} \tag{9.356}$$

となる. ここで σ の真空期待値が一般にはゼロでないことを考慮した. ラグランジアンの σ を含む部分は, 二次形式で

$$-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2 + \sqrt{2\alpha g}\sigma\bar{\psi}\psi = -\tfrac{1}{2}\alpha\left(\sigma - \sqrt{\frac{2g}{\alpha}}\bar{\psi}\psi\right)^2 + g(\bar{\psi}\psi)^2 \tag{9.357}$$

となり, ウィック回転した後の経路積分では完全にガウス項となる. σ 積分をしてしまえば, ラグランジアンおよび積分測度は元の (9.353) の理論と全く同じになる.

σ を含むラグランジアンについては, 普通の有効ポテンシャルの手法で解析することができる. σ を σ_0 にずらすとラグランジアンの二次の部分は,

$$\mathcal{L}_q = i\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + im - i\sqrt{2\alpha g}\,\sigma_0)\psi - \tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2 \tag{9.358}$$

となり, 9.2 節の方法で積分することができる. 次元の違いから 9.2 節のときとは少し違った結果になり, ユークリッド領域での有効ポテンシャルは,

$$V_{\text{eff}}(\sigma_0) = \tfrac{1}{2}\alpha{\sigma_0}^2 - \tfrac{1}{2}\hbar \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \ln(k_E^2 + M^2) \tag{9.359}$$

となる. ここで質量 M は,

$$M^2 = (m - \sqrt{2\alpha g}\,\sigma_0)^2 \tag{9.360}$$

で与えられる.

例題 9.23: (9.359) を確かめよ.

ここで $m = 0$ の場合について解析しよう. (9.359) は正則化すると

$$V_{\text{eff}}(\sigma_0) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \delta\alpha - \frac{\hbar\alpha g}{2\pi}\right){\sigma_0}^2 + \frac{\hbar\alpha g}{4\pi}{\sigma_0}^2 \ln\left(\frac{\alpha g {\sigma_0}^2}{\Lambda^2}\right) \tag{9.361}$$

となる. ここで Λ は運動量積分のカットオフだ. 再びコールマン・ワインバーグ機構の場合と同様に質量スケールがないことから赤外発散が存在し, 対称な真空上ではくりこめない. コールマン・ワインバーグ機構のときと違う点は, ゼロ質量になるようにはくりこめないということだ. そのため, 任意のくりこみ点 μ を導入する. ゼロ質量の理論ではくりこまれた α を 1 になるようにくりこむ.

$$\left.\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial {\sigma_0}^2}\right|_{\sigma_0=\mu} = 1\ . \tag{9.362}$$

結果が μ に依らないことを要請すると, 8.4 節で議論したようにくりこみ群方程式が得られる. (9.362) からくりこみ因子,

$$\delta\alpha = -\frac{\hbar g}{\pi} - \frac{\hbar g}{2\pi}\ln\left(\frac{\alpha g \mu^2}{\Lambda^2}\right) \tag{9.363}$$

が得られる. (9.363) を. (9.361) に代入すると, くりこまれた有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}(\sigma_0) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3\hbar g}{2\pi}\right){\sigma_0}^2 + \frac{\hbar g}{4\pi}{\sigma_0}^2 \ln\left(\frac{{\sigma_0}^2}{\mu^2}\right) \tag{9.364}$$

が得られる.

この有効ポテンシャルは, μ をどう選んでも常にゼロでない σ_0 で最小となる. 実際に選ばれる物理的真空は, σ_0 が方程式

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma_0} = 1 - \frac{\hbar g}{\pi} + \frac{\hbar g}{\pi} \ln\left(\frac{\sigma_0}{\mu}\right) = 0 \tag{9.365}$$

の解,

$$\sigma_0 = \mu \exp\left(1 - \frac{\pi}{\hbar g}\right) \tag{9.366}$$

となるような状態だ.

ひとたび μ の値が決められると, σ_0 の値も決まり, モデルの物理的観測が可能な部分も決まってくる. 例えばフェルミオンの質量は物理的真空で,

$$M_f = \sqrt{2g}\,\sigma_0 = \sqrt{2g}\,\mu \exp\left(1 - \frac{\pi}{\hbar g}\right) \tag{9.367}$$

となる. ここではまだ g の値は決まっていない. しかし上の結果がμ に依らないことを要請すると, g は μ の関数として求まる. それにはくりこみ群方程式

$$\mu \frac{dV_{\text{eff}}}{d\mu} = 0 \tag{9.368}$$

を解けばよい. ここで V_{eff} に入っているすべてのパラメーターは陰に μ に依っていると考える. 有効ポテンシャルの微分は解 (9.366) を用いて評価する. まず解 (9.366) から,

$$\frac{d\sigma_0}{d\mu} = \exp\left(1 - \frac{\pi}{\hbar g}\right) + \frac{\mu g}{\hbar g^2}\,\frac{dg}{d\mu}\,\exp\left(1 - \frac{\pi}{\hbar g}\right) \tag{9.369}$$

および

$$\ln\left(\frac{\sigma_0}{\mu}\right) = 1 - \frac{\pi}{\hbar g} \tag{9.370}$$

が得られる. これらを用いて (9.368) の微分方程式は g の微分のみであらわされる. また, (9.366) が (9.365) を満たすことから,

$$\frac{dg}{d\mu} = -\frac{2\hbar g^2}{(\hbar g + 2\pi)\mu} \tag{9.371}$$

が得られる.

この方程式を解くと,

$$2\left(1-\frac{\pi}{\hbar g}\right)+\ln\left(\frac{\hbar g}{\pi}\right)=\ln\left(\frac{{\mu_0}^2}{\mu^2}\right) \tag{9.372}$$

ここで μ_0 は $g=\pi/\hbar$ を満たすような μ の値で, 次のように物理的質量 M_f と関係している. (9.367) で $g=\pi/\hbar$ とすると,

$$\mu=\sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}}\,M_f \tag{9.373}$$

となり, このときの μ を μ_0 とおくので,

$$\mu_0=\sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}}\,M_f\ . \tag{9.374}$$

結局 M_f を与えるとすべての μ での g が決まることになる. (9.372) から, $\mu\to\infty$ で $g\to 0$ となるので, この理論は漸近的自由な理論だ.

複合演算子のプロパゲーター

$$\langle 0|\,T\{\sigma(x)\sigma(y)\}\,|0\rangle=2g\,\langle 0|\,T\{\bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(y)\psi(y)\}\,|0\rangle \tag{9.375}$$

の極はこのくりこみ処方では1にとってある. σ_0 の値はこの複合演算子の真空期待値,

$$\sigma_0=\sqrt{2g}\,\langle 0|\,\bar{\psi}\psi\,|0\rangle \tag{9.376}$$

となっている. σ_0 がゼロでないことから, このモデルではフェルミオンの対が真空凝縮することによって普通の真空よりも低いエネルギーが実現していることがわかる. このことはフェルミオンの存在しない状態では $\bar{\psi}\psi$ がゼロになることからもわかる.

このようなメカニズムは超伝導体の中でみられる. 電子が格子内にいるときは, 格子によってもともと電子がもっていた電荷は遮閉される. 一方, 電子の静電力でおこる格子変形によるフォノンの交換によって, 電子間に弱い引力がはたらく. 超伝導体では, この弱いフォノンによる引力がクーロン反発力に打ち勝っている. この結果としてあらわれる引力ポテンシャルは, (9.353) と同様の4点相互作用で書ける. 超伝導体の基底状態ではクーパー対として

知られる電子対の凝縮が起こり, 普通の基底状態よりも低いエネルギーになる. このクーパー対の凝縮は荷電スカラー場で (9.355) の複素数版,

$$\sigma = \psi^\dagger \psi^\dagger \tag{9.377}$$

を用いてモデル化することもできる. この場はアーベリアン・ヒッグスモデルと同じように電磁相互作用する. 従って, 超伝導体の中では光子は有効質量を持ち, これに起因する多くの著しい現象が観測されている. ヒッグスモデルやこの節のグロス・ヌボーモデルはこれらの現象を相対論的な理論に焼き直したものだ. 経路積分を用いた超伝導体の取り扱いは本書での相対論的モデルの取り扱いととても似通っている [43].

グロス・ヌボモデルを拡張して, 標準理論の QCD セクターにおけるカイラル対称性の破れを記述する簡単なモデルを作ることは重要だ. QCD ではクォーク間のグルーオンを媒介とした力がカラー一重項をまとめる引力ポテンシャルを生むので, この現象を記述する有効場の理論は自然に 4 点の引力相互作用を含むことになる. そこではクォークの真空凝縮が起こり, カイラル不変性が破れる. このようにしてクォークやクォークの束縛状態が有効質量を得ることができるのである. この現象は QCD の数値計算からも確かめられている.

参考文献

[1] J. Goldstone, Nuovo Cimento **19**, 154 (1961); Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).

[2] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. D**9**, 3320 (1974); S. Coleman in *Laws of Hadronic Matter*, ed. A. Zichichi, Academic Press, New York, 1975; J. Iliopoulos, C. Itzykson, and A. Martin, Rev. Mod. Phys. **47**, 165 (1975).

[3] K.Symanzik, Commun. Math. Phys. **16**, 48 (1970).

[4] M. Aizenmann, Phys. Rev. Lett. **47**, 1 (1981); J. Fröhlich, Nucl. Phys. B**200** [FS4], 281 (1982).

[5] これらについては, 有効ポテンシャルの他の多くの側面や現代宇宙論への応用も含めて, R.H. Brandenberger, Rev. Mod. Phys. **57**, 1 (1985) で議論されている.

[6] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[7] E. Fermi, Z. Physik **88**, 161 (1934).

[8] この点についてはS. Coleman in *Laws of Hadronic Matter*, ed. A. Zichichi, Academic Press, New York,1975 で詳しく議論されている.

[9] P.W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964); Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964); Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).

[10] R. Brout and F. Englert, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964); G.S. Guralnik, C.R. Hagen, and T.W.B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964); T.W.B. Kibble, Phys. Rev. **155**, 1554 (1967).

[11] クーロン・ゲージでのヒッグス機構についてはJ. Bernstein, Rev. Mod. Phys. **46**, 7 (1974) に詳しい.

[12] J.C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[13] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[14] 自発的に破れた対称性の群論についてはS. Bludman and A. Klein, Phys. Rev. **131**, 2363 (1962) で初めて議論された.

[15] S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961); A. Salam, in *Proceedings of the Eighth Nobel Symposium*, ed. N. Svartholm, Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968; S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).

[16] 弱い相互作用がベクトル・ボソンの交換によるとする仮説は, R.P. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958) で初めて出された.

[17] 例えば, L.B. Okun, *Leptons and Quarks*, North-Holland, Amsterdam, 1982; F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and Leptons*, Wiley, New York, 1984; O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics: Concepts and Phenomena*, Springer-Verlag, New York, 1985 を見よ.

[18] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951); S. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969); J.S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento **60A**, 47 (1969); W.A. Bardeen, Phys. Rev. **184**, 1848 (1969).

[19] K. Fujikawa, Phys. Rev. D**21**, 2848 (1980).

[20] バリオン数非保存については G. t' Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976); Phys. Rev. D**14**, 3432 (1976) で初めて計算された.

[21] J. Schwinger, Phys. Rev. **128**, 2425 (1962).

[22] J. Lowenstein and J. Swieca, Comm. Math. Phys. **24**, 1 (1971); A.Z. Capri and R. Ferrari, Nuovo Cimento **62A**, 273 (1981).

[23] ソリトンについての優れたテキストに, R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, Elsevier, New York, 1987 がある.

[24] ここで述べたソリトン量子化の手法は, N.H. Christ and T.D. Lee, Phys. Rev. D**12**, 1606 (1975) によっている.

[25] C.G. Callan and D.J. Gross, Nucl. Phys. **B93**, 29 (1975).

[26] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley, New York, 1981 にモース理論についての読みやすい解説がある.

[27] 例えば, M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965 を見よ.

[28] この点についての包括的な記述は, S. Coleman in *The Whys of Subnuclear Physics*, ed. A. Zichichi, Plenum Press,New York, 1979 にある.

[29] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz, and Y.S. Tyupkin, Phys. Lett. **59B**, 85 (1975); R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, 172 (1976). 一般的なレヴューとしては, [24],[29], と A.M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Harwood, Chur, 1987 がある.

[30] インスタントン的効果でバリオン数非保存が増大することについては, H. Aoyama and H. Goldberg, Phys. Lett. **B188**, 506 (1987); T. Banks, G. Farrar, M. Dine, and B. Sakita, Nucl. Phys. **B347**, 581 (1990); H. Aoyama and H. Kikuchi, Phys. Rev. D**43**, 1999 (1991).

[31] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **A133**, 60 (1931).

[32] T.T. Wu and C.N. Yang, Phys. Rev. D**12**, 3845 (1975).

[33] 例えば, T. Eguchi, P.B. Gilkey, and A.J. Hanson, Phys. Rep. **66**, 213 (1980); C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, New York, 1983; M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Adam Hilger, Bristol, 1990.

[34] モノポールとダイオンについての優れた議論は, *The Unity of the Fundamental Interactions*, ed. by A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1983 の中の S.Coleman にある.

[35] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B79**, 276 (1974); A.M. Polyakov, JETP Lett. **20**, 194 (1974); もしくは, [24] と [35] のレヴューを見よ.

[36] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).

[37] C. Bernard, Phys. Rev. D**9**, 3312 (1974).

[38] 場の量子論と相転移についての包括的な記述は, J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford, 1989 にある.

[39] GSWモデルをより大きい対称性を持つ理論に埋め込む多くの試みについては, P. Langacker, Phys. Rep. **72C**, 185 (1981); C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Benjamin-Cummings, New York, 1983; G. Ross, *Grand Unified Theories*, Benjamin-Cummings, Menlo Park, California, 1985 にある.

[40] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D**7**, 1888 (1973).

[41] D. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. D**10**, 3235 (1974).

[42] 経路積分のテクニックを凝縮系の問題に応用したものとして, V.N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987 がある.

訳者あとがき

序で著者 Mark Swanson 氏が述べているように，経路積分は，現代物理学で非常に有効なパラダイムを提供している．

本書はこの経路積分を量子力学の基礎から説き起こし，場の理論での種々の応用にまで話を進めている．これだけの範囲を，経路積分をテーマとして扱ったものとして，この本は非常にユニークなものだ．また，汎関数空間やグラスマン数等，初学者がとまどいやすい部分についても非常に丁寧な導入を行なっており，量子力学を学んだ学部学生が，本格的なテキストに進む前に場の理論およびその素粒子物理への応用について概観するのにも適している．我々訳者は，素粒子論を専門としていて，経路積分を研究の現場で日々使っている．様々な物理系を具体的に解析する上で，経路積分は現在素粒子論，物性論等で必要不可欠なものとなっている．読者には，是非この本でこの重要な理論形式を充分に学びとり，生かしてもらいたいと思う．

この本を作るにあたっては，物理的な内容の正確さを期すために，記述を改めた方がいいと思われるところは著者 Swanson 氏と相談した上で，修正，変更等を加えた．また数式の入った LaTeX ファイルを著者から送って頂いたことで，校正の労を大幅に省けた．多くの便宜を図って下さった Swanson 氏に感謝する．

また，本書の出版に際し，吉岡書店の上川正二氏に大変お世話になった．ここに記して感謝する．

1996 年 6 月

訳　者

索　　引

ア　行

カ　行

サ　行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ　行

ISBN 4-8427-0000-9

訳者略歴

青山　秀明（あおやま　ひであき）

1976年：京都大学理学部物理学科卒

1982年：カリフォルニア工科大学博士課程修了．Ph.D

1982—1988年：スタンフォード線形加速器センター理論部研究員，ハーバード大学客員研究員等

1988年：京都大学理学部助手

現在：京都大学総合人間学部基礎科学科助教授
訳書に「物理学演習モスクワの森」（コゼル他編，吉岡書店），「場の理論—統計論的アプローチ」（パリージ著，吉岡書店）．

川村　浩之（かわむら　ひろゆき）

1993年：京都大学理学部物理系卒

現在：京都大学人間環境学研究科在学中

和田　信也（わだ　しんや）

1993年：関西学院大学理学部物理学科卒

現在：京都大学人間環境学研究科在学中

M.B. Swanson：経路積分法—量子力学から場の理論へ—　1996 ©

1996年9月10日　第1刷発行

訳　者　青山秀明　川村浩之　和田信也

発行者　吉岡　誠

〒606 京都市左京区田中門前町 87

株式会社　吉岡書店

電話(075)781-4747/振替　01030-8-4624

印刷・製本㈱太洋社

ISBN 4-8427-0258-3

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の暴露に，物質の精妙な機構の解明に，驚異的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比すべき革命の前夜にあるといわれているこの時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

物　理　学　叢　書

編集・小谷正雄／小林　稔／井上　健／山本常信／高木修二

フェルミ　小林　稔他訳 **原子核物理学** 408頁	本書は著者の講義に補正を加えられたものであり，実験・理論両方面にわたって原子核の基礎知識の全ぼうが要領よくまとめられている．内容の新鮮さ力強さに著者の個性が表われている．
シッフ　井上　健訳 **新版 量子力学 上下** 上 368頁　下 320頁	刊行以来無比の標準的教科書として絶賛を博してきた本書は，原著第3版刊行にともない全面的に版を改めた．基本的な概念やその数学的形式を丁寧に解説されている量子力学の入門書である．
ゴールドスタイン　瀬川富士他訳 **新版 古典力学 上下** 上 528頁　下416頁	最近，物性物理や素粒子物理を学ぶ人の間に，古典力学はきちんと学ぶべきだという気持が強い．本書は，場の理論から，多体系の物理学を研究する上で，基本的な入門書であり，古典力学を新しい見地から解説．
リープマン，ロシュコ　玉田　珖訳 **気体力学** 512頁	高速流体力学の基礎をできるだけ物理的に記述し，流体運動と流体の物性との結びつきの理解へと読者を導き，反応性気流や稀薄気体の流れなど最近の問題にも適応するすぐれた教科書である．
フレーリッヒ　永宮健夫・中井祥夫訳 **誘電体論** 240頁	誘電率の意味を熱力学的，統計力学的にとらえ，個々の分子の双極子能率と誘電率より固体，気体，溶液などの誘電的性質を統一的観点から記述され，本質を簡潔，かつ完璧にまとめられている．